Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel)

1. Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung:

$0{,}5x^2 - 0{,}25x = 2{,}25 + 0{,}5x$

Wir formen so um, dass auf der einen Seite der Gleichung nur noch eine null steht.

$$0{,}5x^2 - 0{,}25x = 2{,}25 + 0{,}5x \qquad | - 0{,}5x$$

$$0{,}5x^2 - 0{,}75x = 2{,}25 \qquad | - 2{,}25$$

$0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25 = 0$

Allgemein schreibt man so eine Gleichung auf durch

$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}; b, c \in \mathbb{R})$

Die allgemeine Lösung dafür erhält man durch quadratisches Ergänzen:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

In der Regel schreibt man in der allgemeinen Lösung bei dem x dann im Index noch $_{1,2}$ dazu, da es zwei mögliche Lösungen geben kann.

$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Möchte man nun also die Gleichung

$0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25 = 0$

lösen, dann vergleicht man die Koeffizienten aus der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit denen aus der Problemstellung.
Dann gilt hier:
$a = 0{,}5 \qquad b = -0{,}75 \qquad c = -2{,}25$
Das können wir nun in die Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{-(-0{,}75) \pm \sqrt{(-0{,}75)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-2{,}25)}}{2 \cdot 0{,}5}$$

Anschließend wird vereinfacht:

$$x_{1,2} = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{5{,}0625}}{1} = \frac{0{,}75 \pm 2{,}25}{1}$$

Man erhält damit die folgenden zwei Lösungen:

$$x_1 = \frac{0{,}75 - 2{,}25}{1} = -1{,}5$$

$$x_2 = \frac{0{,}75 + 2{,}25}{1} = 3$$

Setzen wir also den Wert $-1{,}5$ für x in den Term $0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25$ ein, dann erhalten wir

$$0{,}5 \cdot (-1{,}5)^2 - 0{,}75 \cdot (-1{,}5) - 2{,}25 = 0$$
$$0{,}5 \cdot 2{,}25 + 1{,}125 - 2{,}25 = 0$$
$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Also ist $x = -1{,}5$ eine Lösung der Gleichung $0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25 = 0$. Für $x = 3$ gilt das Gleiche.

Grundsätzlich hat aber nicht jede quadratische Gleichung zwei Lösungen.

2. Wir betrachten folgende Gleichung und setzen in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ein.

$3x^2 + 2x + 5 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-56}}{6} = \lightning$$

Die Wurzel aus negativen Zahlen können wir in dem uns bekannten Zahlenraum nicht ziehen. Für die Gleichung

$3x^2 + 2x + 5 = 0$

gibt es also keine Zahl, die wir für x einsetzen können, so dass diese Gleichung erfüllt ist. Deswegen wird die Lösungsformel für quadratische Gleichungen auch häufig in einer anderen Form angegeben. Man schreibt

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen).

Der Ausdruck unter der Wurzel wird separat berechnet. D steht für die sogenannte Diskriminante.

Dabei gilt:

Ist $D > 0$, dann hat die quadratische Gleichung genau zwei Lösungen.

Ist $D < 0$, dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung.

Ist $D = 0$, dann hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung.

Und diesen dritten Fall schauen wir uns noch in einem letzten Beispiel an.

3. Wir möchten die folgende Gleichung lösen:

$2x^2 + 8x + 8 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$

$D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 64 - 64 = 0$

Der Wert unter dem Wurzelzeichen ist also null. Dies führt dazu, dass wir genau eine Lösung erhalten.

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 \pm 0}{2 \cdot 2} = \frac{-8}{2 \cdot 2} = -2$

Da $-8 + 0$ und $-8 - 0$ jeweils den gleichen Wert ergeben, erhalten wir als einzige Lösung $x_{1,2} = -2$.