## Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel)

Grundlegend befassen wir uns hier mit der Frage, wie quadratische Gleichungen einer bestimmten Form gelöst werden können. Anhand von Anwendungsaufgaben, auch in der Funktionentheorie, landet man in diesem Themengebiet häufig bei einer Problemstellung, wie die folgende, bei der eine quadratische Gleichung gelöst werden muss.

$0{,}5x^2 - 0{,}25x = 2{,}25 + 0{,}5x$

Egal mit welchem Weg man letztendlich die Gleichung löst, empfehlen wir zunächst immer so umzuformen, dass auf der einen Seite der Gleichung nur noch eine null steht. Das erreicht man in der Regel, indem man die Summanden der einen Seite durch die entsprechende beidseitige Gegenoperation auf die andere Seite des „$=$“ Zeichens bringt.

$$0{,}5x^2 - 0{,}25x = 2{,}25 + 0{,}5x \qquad | - 0{,}5x$$

$$0{,}5x^2 - 0{,}75x = 2{,}25 \qquad | - 2{,}25$$

$0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25 = 0$

So eine Gleichung kann man beispielsweise nicht einfach durch das Auflösen nach dem mittleren Ausdruck, in dem $0{,}75x$ steht, erreichen. Denn wir haben $x$ einmal in einem linearen Term stehen, aber auch den Ausdruck $x^2$ in unserer Gleichung. Das Problem lässt sich nun mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösen. Da dieser Weg jedoch mühsam ist, hat man sich dazu entschieden, die quadratische Ergänzung allgemein für eine Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R})$

zu lösen. In die dabei entstehende allgemeine Lösung, kann man dann für die Werte $a$, $b$ und $c$ einfach die Werte der aktuellen Aufgabenstellung einsetzen. Die Herleitung finden Sie, der Übersicht wegen, am Ende des Skripts.

Allgemein entsteht, wenn man die Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R})$

nach $x$ auflöst,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

In der Regel schreibt man in der allgemeinen Lösung bei dem $x$ dann im Index noch $_{1,2}$ dazu, da es zwei mögliche Lösungen geben kann.

$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Möchte man nun also die Gleichung

$0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25 = 0$

lösen, dann vergleicht man die Koeffizienten aus der allgemeinen Form

$ax^2 + bx + c = 0$ mit denen aus der Problemstellung.

Dann gilt hier:

$a = 0{,}5$ $\quad\quad$ $b = -0{,}75$ $\quad\quad$ $c = -2{,}25$

Das können wir nun in die Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{-(-0{,}75) \pm \sqrt{(-0{,}75)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-2{,}25)}}{2 \cdot 0{,}5}$$

Anschließend wird vereinfacht:

$$x_{1,2} = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{5{,}0625}}{1} = \frac{0{,}75 \pm 2{,}25}{1}$$

Man erhält damit die folgenden zwei Lösungen:

$$x_1 = \frac{0{,}75 - 2{,}25}{1} = -1{,}5$$

$$x_2 = \frac{0{,}75 + 2{,}25}{1} = 3$$

Setzen wir also den Wert $-1{,}5$ für $x$ in den Term $0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25$ ein, dann erhalten wir

$$0{,}5 \cdot (-1{,}5)^2 - 0{,}75 \cdot (-1{,}5) - 2{,}25 = 0$$

$$0{,}5 \cdot 2{,}25 + 1{,}125 - 2{,}25 = 0$$

$$0 = 0 \quad ✓$$

Also ist $x = -1{,}5$ eine Lösung der Gleichung $0{,}5x^2 - 0{,}75x - 2{,}25 = 0$. Für $x = 3$ gilt das Gleiche.

Grundsätzlich hat aber nicht jede quadratische Gleichung zwei Lösungen.

Wir betrachten dazu als Beispiel folgende Gleichung und setzen in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ein.

$3x^2 + 2x + 5 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-56}}{6} =$ ↯

Die Wurzel aus negativen Zahlen können wir in dem uns bekannten Zahlenraum nicht ziehen. Für die Gleichung

$3x^2 + 2x + 5 = 0$

gibt es also keine Zahl, die wir für $x$ einsetzen können, so dass diese Gleichung erfüllt ist. Deswegen wird die Lösungsformel für quadratische Gleichungen auch häufig in einer anderen Form angegeben. Man schreibt

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$.

Der Ausdruck unter der Wurzel wird also separat berechnet. D steht für die sogenannte Diskriminante.

Dabei gilt:

Ist $D > 0$, dann hat die quadratische Gleichung genau zwei Lösungen. (Erstes Beispiel)

Ist $D < 0$, dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung. (zweites Beispiel)

Ist $D = 0$, dann hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung.

Und diesen dritten Fall schauen wir uns noch in einem letzten Beispiel an.
Wir möchten die folgende Gleichung lösen:

$2x^2 + 8x + 8 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$

$D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 64 - 64 = 0$

Der Wert unter dem Wurzelzeichen ist also null. Dies führt dazu, dass wir genau eine Lösung erhalten.

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 \pm 0}{2 \cdot 2} = \frac{-8}{2 \cdot 2} = -2$

Da $-8 + 0$ und $-8 - 0$ jeweils den gleichen Wert ergeben, erhalten wir als einzige Lösung $x_{1,2} = -2$.

Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Wir führen nun zunächst die quadratische Ergänzung durch:

$ax^2 + bx + c = 0$

1. Schritt: a ausklammern.

$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$

2. Schritt: Den zweiten Summanden als Produkt mit 2 darstellen.

$a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}) = 0$

3. Schritt: Quadratisch ergänzen.

$a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0$

4. Schritt: Anwenden der 1. Binomischen Formel.

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0$

5. Schritt: Ausmultiplizieren der eckigen Klammer.

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + a\frac{c}{a} = 0$

Nun vereinfachen wir noch:

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c = 0$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$

Um nach $x$ auflösen zu können, müssen wir zunächst nach $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ auflösen:

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \quad | + \frac{b^2}{4a} - c$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = + \frac{b^2}{4a} - c \quad |: a$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

Im Folgenden schreiben wir die rechte Seite auf einen Bruchstrich. Dafür müssen wir $\frac{c}{a}$ mit $4a$ erweitern, um den Hauptnenner zu bilden.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Nun müssen wir noch die Wurzel ziehen, was dazu führt, dass zwei mögliche Lösungen entstehen:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

Als nächstes vereinfachen wir den Wurzelterm und lösen dann nach $x$ auf:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad | -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

In der Regel schreibt man in der allgemeinen Lösung bei dem $x$ dann im Index noch $_{1,2}$ dazu, da es zwei mögliche Lösungen geben kann.

$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)