Lineare Gleichungen lösen

Lineare Gleichungen sind in der Regel immer von der Art, wie im folgenden Beispiel dargestellt:

$$3x + 2 = -\frac{1}{2}x + 9$$

Sie können auch in einer etwas komplizierteren Form angegeben werden:

$$-2x + 2 + 5x = 4 - \frac{1}{2}x + 5$$

Grundlegend können, statt x, auch andere Variablen in der Aufgabenstellung vorkommen:

$$-2a + 2 + 5a = 4 - \frac{1}{2}a + 5$$

$$-2z + 2 + 5z = 4 - \frac{1}{2}z + 5$$

Die Logik solche Gleichungen zu lösen, bleibt dabei aber immer gleich. Wir lösen die Gleichung $-2x + 2 + 5x = 4 - \frac{1}{2}x + 5$ im Folgenden Schritt für Schritt nach einem festen Schema, das auch auf andere Aufgaben anwendbar ist.

1. Fassen Sie auf **jeder Seite getrennt** die Ausdrücke gleicher Art zusammen:

$$-2x + 2 + 5x = 4 - \frac{1}{2}x + 5$$

Dazu:

- Wichtig: Es können immer nur Ausdrücke zusammengefasst werden, die vom selben "Typ" sind. In unserem Fall sind dies Summanden, die ein x enthalten oder nicht:

  $$-2x + 2 + 5x = 4 - \frac{1}{2}x + 5$$

  Die blauen und pinken Ausdrücke sind alle jeweils vom selben "Typ". Nur diese Ausdrücke können miteinander verrechnet werden. Das Vorzeichen gehört jeweils zur Zahl dazu.

- Auf der linken Seite hat man $-2x$ und $+5x$ vom selben "Typ" stehen. Dies kann zu $3x$ zusammengefasst werden.

  $$-2x + 2 + 5x = 4 - \frac{1}{2}x + 5$$

  $$3x + 2 = 4 - \frac{1}{2}x + 5$$

- Auf der rechten Seite sind $+4$ und $+5$ vom selben Typ und können zu $+9$ zusammengefasst werden. (Hinweis: Steht in der Gleichung vor einer Zahl kein Vorzeichen, wie hier bei der 4, dann ist die Zahl positiv.

$$3x + 2 = 4 - \frac{1}{2}x + 5$$
$$3x + 2 = 9 - \frac{1}{2}x$$

2. Stellen Sie durch beidseitiges Umformen so um, das auf jeder Seite nur noch Ausdrücke desselben “Typs“ stehen.

Dazu:

- Da wir auf den jeweiligen Seiten nicht weiter vereinfach können, müssen wir die Gleichung umformen. Dies findet durch sogenannte Äquivalenzumformungen statt. Das bedeutet, dass auf der **linken und rechten** Seite der Gleichung jeweils **die gleiche Rechenoperation** durchgeführt wird.

$$3x + 2 = 9 - \frac{1}{2}x$$

- Auf der linken Seite der Gleichung soll beispielsweise die $+2$ „verschwinden“. Dafür muss beidseitig -2 gerechnet werden.

$$3x + 2 = 9 - \frac{1}{2}x \qquad | -2$$

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 9 - \tfrac{1}{2}x \\ -2 \quad & \; -2 \\ 3x \quad &= 7 - \tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

Der Ausdruck -2 ist vom Typ pink und muss deshalb mit den pinken Ausdrücken verrechnet werden. Wird beim linken Term der Wert 2 subtrahiert (≙ „abgezogen“), steht nur noch $3x$ auf dieser Seite. Wird beim rechten Term der Wert 2 subtrahiert, dann bleibt noch $7 - \frac{1}{2}x$ übrig.

$$3x \quad = 7 - \frac{1}{2}x$$

- Damit auf beiden Seiten der Gleichung nur noch Ausdrücke eines "Typs" stehen, muss die $-\frac{1}{2}x$ auf der rechten Seite noch verschwinden. Dafür muss beidseitig $+\frac{1}{2}x$ gerechnet werden.

$$3x = 7 - \frac{1}{2}x \quad |+\frac{1}{2}x$$

$$\begin{aligned} 3x &= 7 - \frac{1}{2}x \\ +\frac{1}{2}x \quad & \quad +\frac{1}{2}x \\ 3{,}5x &= 7 \end{aligned}$$

  Der Ausdruck $+\frac{1}{2}x$ ist vom Typ blau und muss deshalb mit den blauen Ausdrücken verrechnet werden. Wird beim linken Term der Wert $\frac{1}{2}x$ addiert ($\triangleq$ „dazugerechnet"), steht $3{,}5x$ auf dieser Seite. Wird beim rechten Term der Wert $\frac{1}{2}x$ addiert, dann bleibt noch 7 übrig.

  Nun wurden alle Typen voneinander getrennt.
  $3{,}5 \cdot x = 7$

3. Isoliere x.

   Man kann nun sehen, dass die Gleichung

   $3{,}5 \cdot x = 7$

   genau für $x = 2$ erfüllt wird. Erkennt man das nicht, dann muss noch ein letztes Mal ungeformt werden.

   Dazu:

- Auf der linken Seite steht das Produkt $3{,}5 \cdot x$.
  Damit das x allein dasteht, muss der Ausdruck durch 3,5 geteilt werden.

$$\begin{aligned} 3{,}5 \cdot x &= 7 \qquad |:3{,}5 \\ :3{,}5 \quad & \quad :3{,}5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Man kann sich allgemein merken:
Um bei einer Gleichung den Wert einer Seite zu „entfernen“, muss immer die **Gegenoperation** durchgeführt werden.

- Die $+2$ wurde mit -2 „entfernt“:

$$3x + 2 = 9 - \frac{1}{2}x \qquad |-2$$

$$3x \qquad = 7 - \frac{1}{2}x$$

- Die $-\frac{1}{2}x$ wurden mit $+\frac{1}{2}x$ „entfernt“:

$$3x = 7 - \frac{1}{2}x \quad |+\frac{1}{2}x$$

- Und die 3,5 im Produkt wurden mit : 3,5 aufgelöst:

$$3{,}5 \cdot x = 7 \qquad |:3{,}5$$

$$x = 2$$

Der erhaltene x-Wert erfüllt nun unsere ursprüngliche Gleichung. Setzen wir also in die Gleichung

$$-2x + 2 + 5x = 4 - \frac{1}{2}x + 5$$

für x den Wert 2 ein, dann entsteht eine wahre Aussage:

$$-2 \cdot 2 + 2 + 5 \cdot 2 = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 5$$

$$-4 + 2 + 10 = 4 - 1 + 5$$

$$8 = 8$$

Für jeden anderen Wert von x entsteht eine falsche Aussage, da wir den passenden x-Wert eindeutig bestimmt haben.

WARNUNG:

Da Punkt vor Strich gilt, müssen immer erst die Summen und dann die Produkte aufgelöst werden.

$$3x + 2 = -\frac{1}{2}x + 9$$

Würden wir hier zum Beispiel : 3 rechnen, dann müsste man das jeweils auf den ganzen Ausdruck beziehen.

$$3x + 2 = -\tfrac{1}{2}x + 9 \qquad |:3$$

$(3x + 2) = (-\tfrac{1}{2}x + 9)$

$:3 \qquad\qquad :3$

$(3x + 2):3 = \left(-\tfrac{1}{2}x + 9\right):3$

$x + \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{6}x + 3$

Ich würde Ihnen nicht empfehlen so zu rechnen, da die Ausdrücke damit komplizierter werden und das nicht zielführend ist.