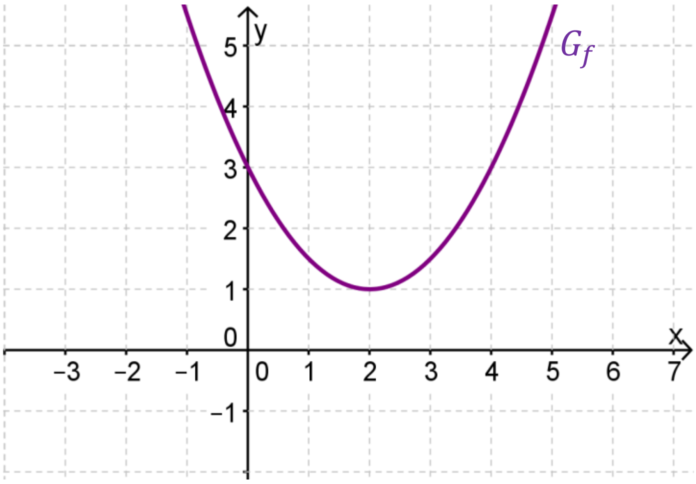
Graphische Bestimmung der Wertemenge einer Funktion

Die Wertemenge einer Funktion mit Hilfe seines Graphen zu bestimmen ist eine der einfacheren Dinge in der Funktionentheorie.

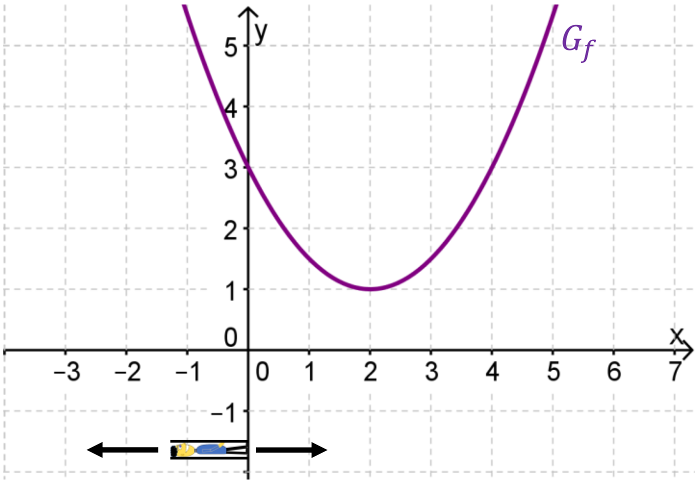
Dazu betrachten wir eine kurze Einführung.

Möchte man die maximale Definitionsmenge einer Funktion bestimmen, dann geht es dabei immer darum, welche Werte für x in die Funktionsgleichung eingesetzt werden dürfen. Dabei wird ausschließlich darauf geachtet, ob beim Einsetzen gegen Gesetze der Mathematik verstoßen wird. Auch, wenn es irgendwelche Fragestellungen gibt, bei denen es darum geht, für welche x-Werte eine Funktion bestimmte Eigenschaften besitzt (z.B. $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) > g(x)$), dann bezieht sich das auf Werte, die in die Funktionsgleichung eingesetzt werden. Diese Stellen kennzeichnet man beim zugehörigen Funktionsgraphen auf der x-Achse.

Bei der Wertemenge geht es darum zu erkennen, welche y-Werte bzw. Funktionswerte eine Funktion, in Abhängigkeit der Definitionsmenge, annehmen kann. Dafür müssen wir bei der graphischen Betrachtung, die y-Achse betrachten. Und hier kann man ein sehr einfaches Prinzip anwenden. Wir betrachten das nebenstehende Beispiel.

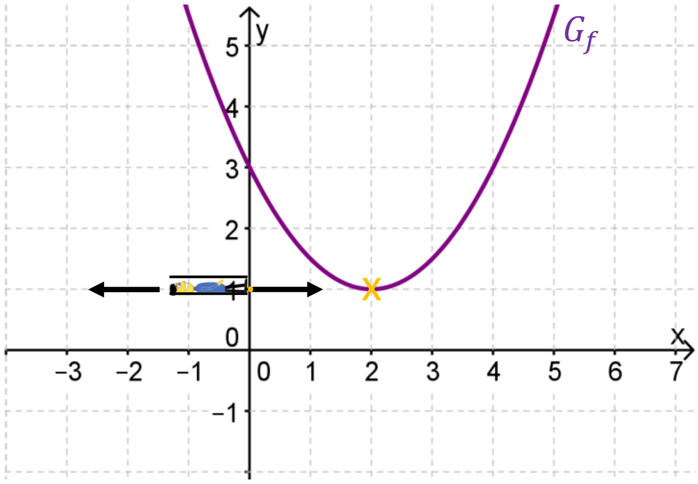


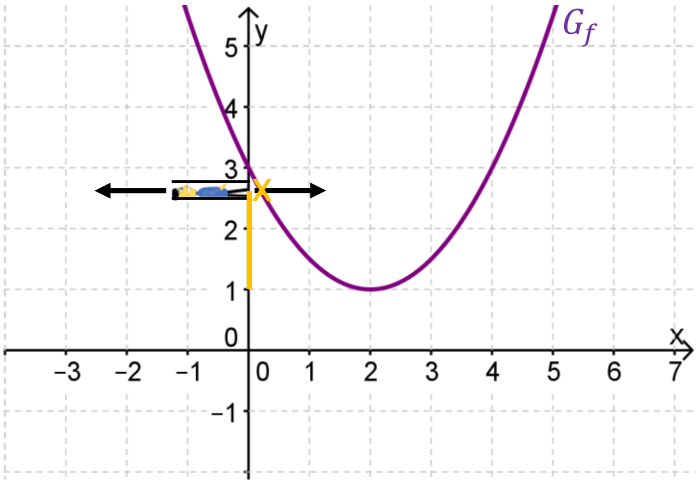
Nun stellen wir uns vor, dass eine Person auf der y-Achse entlang geht. Diese Person kann aber nur genau nach oben oder unten schauen, als ob sie in einem Rohr stecken würde.

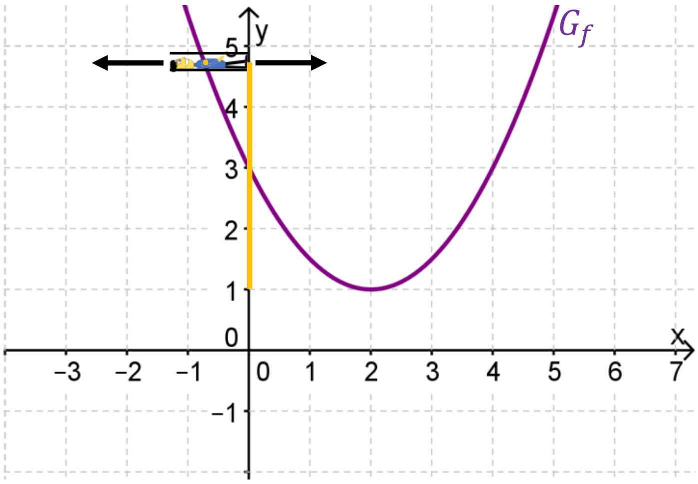


Sobald die Person an eine Stelle auf der y-Achse kommt, bei der sie den Funktionsgraphen sehen kann, gehört diese Stelle zur Wertemenge dazu. Das ist in diesem Beispiel ab der Stelle $y = 1$ der Fall.

Geht die Person nun weiter, dann sieht sie durch das Schauen nach oben oder unten immer mindestens eine Stelle des Funktionsgraphen.







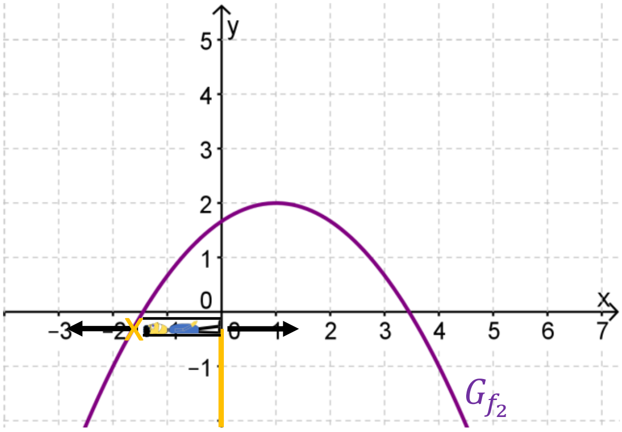
Nach diesem Vorgehen ist die Wertemenge der zugehörigen Funktion beschrieben durch den Wert 1 und alle Werte, die drüber liegen.

Kann die Person theoretisch nach oben beliebig weit laufen und dennoch Punkte des Graphen sehen, dann geht das Intervall der Wertemenge bis $+\infty$. Die Wertemenge kann man dann folgendermaßen hinschreiben:

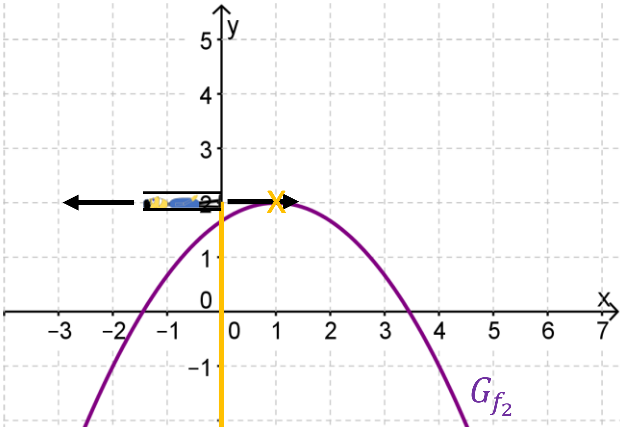
$\mathbb{W}_f = [1; +\infty[$

Die Ausdrücke $+\infty$ und $-\infty$ werden bei Intervallen immer ausgeschlossen, da diese keine konkreten Zahlenwerte darstellen.

Beispiel 2:



Nach unserer Logik sieht die Person bei diesem Beispiel den Graphen von unten kommend die ganze Zeit, bis sie auf der y-Achse an der Stelle $y = 2$ angelangt.

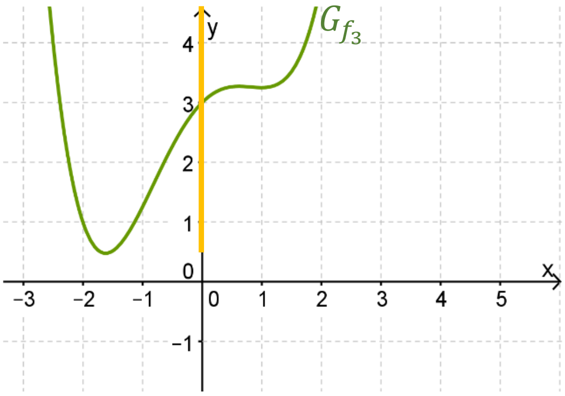


Ab dieser Stelle kann sie keinen Punkt des Funktionsgraphen mehr sehen.

Damit gilt für die Wertemenge:

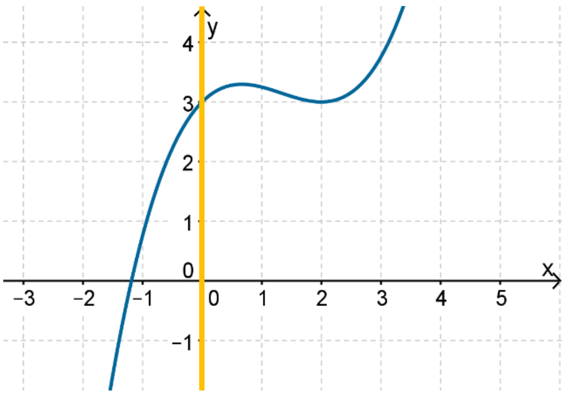
$\mathbb{W}_{f_2} =]-\infty; 2]$

Damit können die Wertemengen der folgenden Graphen ganz einfach bestimmt werden:



Da die Person hier auch wieder beliebig weit nach oben laufen kann und die Punkte der Funktion dabei noch sehen kann, gilt für die Wertemenge:

$\mathbb{W}_{f_3} = [0{,}5; +\infty[$



Bei diesem Beispiel kann die Person den Graphen an jeder Stelle auf der y-Achse sehen. Also gilt: $\mathbb{W}_{f_4} =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.