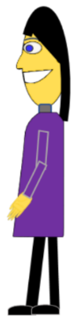
Inhalt

Definition der Quadratwurzel und die reellen Zahlen



Merke: Definition der Quadratwurzel

Gegeben ist eine Zahl $r \in \mathbb{Q}_0^+$. Diejenige nichtnegative Zahl x, deren Quadrat r ergibt nennt man die Quadratwurzel von r, kurz $\sqrt{r}$ und es gilt $\sqrt{r} = x$.

Der Wert r wird dabei als Radikand bezeichnet.

Beispiele:

$\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$

Taschenrechner: $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{1}\boxed{0}$ $\boxed{=}$ 3,16227766

Tatsächlich ist $\sqrt{10}$ eine unendlich lange Zahl. Die ersten 30 Nachkommastellen sind $\sqrt{10}$ =3,1622776601683793319988935444327. Da die Zahl unendlich lang ist, aber sich durch keine feste Zahlenfolge, wie z.B. $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ beschreiben lässt, können wir $\sqrt{10}$ auch nicht als Bruch darstellen.

Die bisher bekannte Zahlenmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ beinhaltet aber gerade alle Zahlen, die sich auch als Bruch darstellen lassen.

Man nennt Zahlen, wie zum Beispiel $\sqrt{10}$, deshalb auch irrationale Zahlen, also Zahlen, die sich eben genau nicht als Bruch darstellen lassen. Dazu gehört beispielsweise auch die Zahl Pi (Man schreibt dafür den Buchstaben π). $\pi \approx 3{,}141592654$

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (z.B. $\frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5{,}3, \frac{12}{29}\ldots$) und die Menge der irrationalen Zahlen (z.B. $\sqrt{10}$, π, die eulersche Zahl e, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{39}$, $\sqrt{12}$) kann man zusammenfassend als Menge der "reellen Zahlen" beschreiben. Dafür ist die abkürzende Schreibweise $\mathbb{R}$.

Insgesamt kennen wir damit folgende Zahlenmengen:

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (Die Menge der natürlichen Zahlen)

$\mathbb{Z} = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (Die Menge der ganzen Zahlen)

$\mathbb{Q} = \{-5{,}8, \frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5{,}3, \frac{12}{29} \ldots\}$ (Die Menge der rationalen Zahlen)

$\mathbb{R} = \{-5{,}8, \frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5{,}3, \frac{12}{29}, \sqrt{10}, \pi, e, \sqrt{2}, -\sqrt{39}, \sqrt{12}\ \ldots\}$ (Die Menge der reellen Zahlen)

Die jeweils betrachtete Zahlenmenge ist also immer auch in der nachfolgenden enthalten.

Irrationalität von der Quadratwurzel aus 2

Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist:

Wir behaupten, dass $\sqrt{2}$ rational ist und bringen diese Aussage zum Widerspruch.
$\sqrt{2}$ ist rational → $\sqrt{2}$ kann durch einen Bruch dargestellt werden kann.

Es gibt also zwei teilerfremde ganze Zahlen p und q, so dass gilt

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Wichtig für unseren Beweis ist, dass p und q teilerfremde Zahlen sind. Das bedeutet, dass $\frac{p}{q}$ einen vollständig gekürzten Bruch darstellt. (z.B. $\frac{3}{2}, \frac{29}{20}, \frac{127}{90} \ldots$)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow\ 2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad | \cdot q^2$$

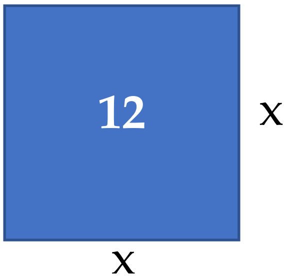
$$2q^2 = p^2 \qquad | : 2$$

$$q^2 = \frac{p^2}{2}$$

- ➔ p^2 ist durch 2 teilbar.
- ➔ p ist durch 2 teilbar.
- ➔ p^2 ist durch 4 teilbar.
- ➔ Wegen $2 \cdot q^2 = p^2$ ist auch $2 \cdot q^2$ durch 4 teilbar.
- ➔ q^2 ist durch 2 teilbar.
- ➔ q ist durch 2 teilbar. (Nach der gleichen Logik wie für p)
- ➔ Widerspruch zur Annahme, dass es teilfremde p und q gibt, die $\sqrt{2}$ beschreiben können.
- ➔ $\sqrt{2}$ muss irrational sein.

Das Heron-Verfahren zum Nähern von Quadratwurzeln

Wir betrachten, wie im Kapitel „Quadratwurzeln“, ein Quadrat mit einem bestimmten Flächeninhalt. In diesem Fall soll der Flächeninhalt gleich 12 m^2 sein. Im Folgenden wird einheitslos gerechnet.



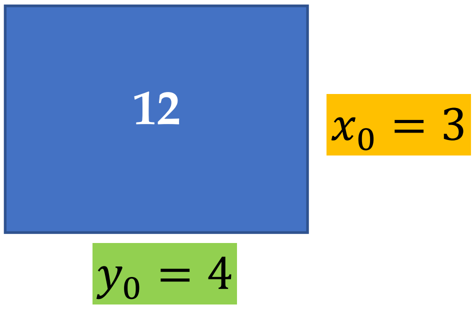
Es gilt: $A = x^2$.
hier: $12 = x^2$.

Anders ausgedrückt suchen wir die Quadratwurzel aus 12, also $\sqrt{12}$. Die Zahl, die unter der Wurzel steht, wird dabei als Radikand bezeichnet. Hier hat der Radikand den Wert 12.

Wir nähern die Seitenlängen zunächst:

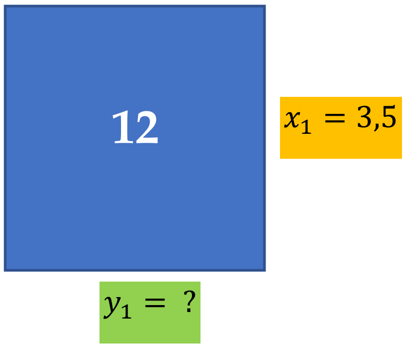
$x_0 = 3$ und $y_0 = 4$ → $A = 3 \cdot 4 = 12$ [m²]

WICHTIG: Das <u>Produkt</u> der genäherten Seitenlängen muss <u>unbedingt 12</u> ergeben!



1. <u>Berechne das arithmetische Mittel der Seitenlängen.</u>

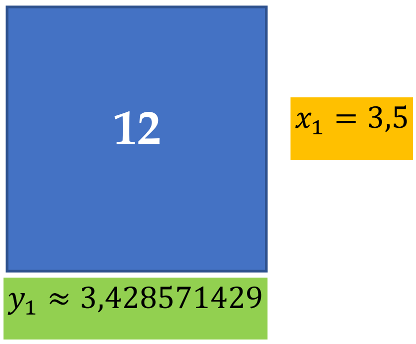
$x_1 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$



2. <u>Berechne y_1 aus der Flächeninhaltsformel.</u>

Es gilt: $12 = 3{,}5 \cdot y_1$.

→ $y_1 = \frac{12}{3{,}5} \approx 3{,}428571429$



Damit haben wir ein Rechteck erhalt, das schon sehr ähnlich zu dem entsprechenden Quadrat aussieht. Tatsächlich kann man zeigen, dass der gesuchte Wert (hier: $\sqrt{12}$) zwischen den beiden Seitenlängen liegt.

→$\sqrt{12}$ liegt im Intervall [3,428571429; 3,5] (Erklärung im Video)

Möchten wir eine noch bessere Näherung erhalten, dann müssen wir die Schritte 1. und 2. einfach nur wiederholen. Und diese Art der Wiederholungen sind im Folgenden in einer Tabelle zusammengetragen.

1. Berechne das arithmetische Mittel der Seitenlängen:	2. Berechne den y-Wert aus der Flächeninhaltsformel:	$\sqrt{12}$ liegt nun im folgenden Intervall:
$x_1 = \frac{3+4}{2}$ $= 3{,}5$	$y_1 = \frac{12}{3{,}5}$ $\approx 3{,}428571429$	[3,428571429; 3,5]
$x_2 = \frac{3{,}428571429 + 3{,}5}{2}$ $\approx 3{,}464285715$	$y_2 = \frac{12}{3{,}464285715}$ $\approx 3{,}463917526$	[3,463917526; 3,464285715]
$x_3 = \frac{3{,}463917526 + 3{,}464285715}{2}$ $\approx 3{,}464101621$	$y_3 = \frac{12}{3{,}464101621}$ $\approx 3{,}464101610$	[3,464101610 ; 3,464101621]
$x_4 = \frac{3{,}464101610 + 3{,}464101621}{2}$ $\approx 3{,}464101616$	$y_4 = \frac{12}{3{,}464101616}$ $\approx 3{,}464101614$	[3,464101614 ; 3,464101616]
$x_5 = \frac{3{,}464101614 + 3{,}464101616}{2}$ $\approx 3{,}464101615$	$y_5 = \frac{12}{3{,}464101615}$ $\approx 3{,}464101615$	[3,464101615 ; 3,464101615]

Die Anzahl an übereinstimmenden Ziffern von x_n und y_n geben an auf wie viele Stellen genau die Näherung der Wurzel schon mindestens bestimmt wurde. Auf Grund der Endlichkeit der Taschenrechnerziffern, ändern sich die Werte ab einem bestimmten Schritt nicht mehr.

Damit wurde $\sqrt{12}$ auf Taschenrechnergenauigkeit bestimmt.

Wurzelterme zusammenfassen

Aufgabe 1:

Fassen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich zusammen.

a) $2\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

Analog zum Rechnen mit Variablen ist es nur möglich Wurzelausdrücke zu addieren, bei denen der Radikand den gleichen Wert hat. Zur Verdeutlichung werden wir den Wurzelausdrücken deswegen im Folgenden jeweils Farben zuordnen.

$2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=\sqrt{2}(2+5)=\sqrt{2}\cdot 7=7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}(1-4)=-3\sqrt{3}$

Merke:

Für gegebene Werte $a,b\in\mathbb{R}$ und $c\in\mathbb{R}^+$ gilt:

$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$

$a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

c) $2\sqrt{5}+3\sqrt{20}$

$2\sqrt{5}+3\sqrt{20}=2\sqrt{5}+3\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{2^2\cdot 5}$

Merke

Für gegebene Werte $a,b\in\mathbb{R}_0^+$ gilt: $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Damit folgt:

$2\sqrt{5}+3\sqrt{20}=2\sqrt{5}+3\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5}=$
$2\sqrt{5}+3\cdot 2\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}+6\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{x}+\sqrt{9x},\ x\geq 0$

$2\sqrt{x}+\sqrt{9x}=2\sqrt{x}+\sqrt{3^2x}=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}=5\sqrt{x}$

Aufgabe 2

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{3}^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=3-2\cdot\sqrt{2\cdot 3}+2=5-2\sqrt{6}$

Dabei haben wir die 2.binomische Formel verwendet: $(a-b)^2=a^2+2ab-b^2$

b) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1},\ x\geq 1$

$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)(x+1)}=\sqrt{x^2-1^2}=\sqrt{x^2-1}$

Dabei haben wir die 3.binomische Formel verwendet: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

c) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$

Merke:

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

d) $\frac{\sqrt{2a^2b}}{\sqrt{2b}}$

$\frac{\sqrt{2a^2b}}{\sqrt{2b}} = \sqrt{\frac{2a^2b}{2b}} = \sqrt{a^2} = a$

Zusammenfassung:

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$

$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Rationalmachen des Nenners

Beim Rationalmachen des Nenners geht es darum Brüche so umzuformen, dass im Nenner keine Wurzelausdrücke vorkommen.

Beispiel 1: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Allgemein gilt $\sqrt{a}^2 = a$ für $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Beispiel 2: $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Wiederholung 3. Binomische Formel: $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$

Beispiel: $(x-2) \cdot (x+2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

Um die 3. Binomische Formel anwenden zu können, muss der Bruch mit $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ erweitert werden.

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}{3-2} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

Aufgaben:

Machen Sie den Nenner rational:

a) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

Lösungen:

Zu a)

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}^2+1\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Zu b)

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{3-5} = \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{-2}$$

Zu c)

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2-2^2} = \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$$