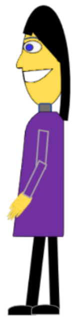
Quadratwurzeln

Definition der Quadratwurzel und die reellen Zahlen



Merke: Definition der Quadratwurzel

Gegeben ist eine Zahl $r \in \mathbb{Q}_0^+$. Diejenige nichtnegative Zahl x, deren Quadrat r ergibt nennt man die Quadratwurzel von r, kurz $\sqrt{r}$ und es gilt $\sqrt{r} = x$.

Der Wert r wird dabei als Radikand bezeichnet.

Beispiele:

$\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$

Aufgabe: Nähern Sie $\sqrt{10}$.

Nun geht es darum eine positive Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert den Wert 10 ergibt:

$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ → Es gibt keine ganzzahlige Lösung für das Problem.
Die Zahl muss aber zwischen 3 und 4 liegen. Wir probieren Zahlen dazwischen aus:
$3{,}1 \cdot 3{,}1 = 3{,}1^2 = 9{,}61$
$3{,}2 \cdot 3{,}2 = 3{,}2^2 = 10{,}24$
Die gesuchte Lösung liegt zwischen den Werten 3,1 und 3,2. Wir probieren weiter.

$3{,}16 \cdot 3{,}16 = 3{,}16^2 = 9{,}9856$
$3{,}17 \cdot 3{,}17 = 3{,}17^2 = 10{,}0489$
Nach dieser Logik kann $\sqrt{10}$ beliebig genähert werden.

Taschenrechner: $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1}\boxed{0}$ $\boxed{=}$ 3,16227766

Tatsächlich ist $\sqrt{10}$ eine unendlich lange Zahl. Die ersten 30 Nachkommastellen sind $\sqrt{10}$ =3,162277660168379331998893544327.

Da die Zahl unendlich lang ist, aber sich durch keine feste Zahlenfolge, wie z.B. $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ beschreiben lässt, können wir $\sqrt{10}$ auch nicht als Bruch darstellen.

Die bisher bekannte Zahlenmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ beinhaltet aber gerade alle Zahlen, die sich auch als Bruch darstellen lassen.

Man nennt Zahlen, wie zum Beispiel $\sqrt{10}$, deshalb auch irrationale Zahlen, also Zahlen, die sich eben genau nicht als Bruch darstellen lassen.

Dazu gehört beispielsweise auch die Zahl Pi (Man schreibt dafür den Buchstaben π).
$\pi \approx 3{,}141592654$

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (z.B. $\frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5{,}3, \frac{12}{29}$ ...) und die Menge der irrationalen Zahlen (z.B. $\sqrt{10}$, π, die eulersche Zahl e, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{39}$, $\sqrt{12}$) kann man zusammenfassend als Menge der "reellen Zahlen" beschreiben. Dafür ist die abkürzende Schreibweise $\mathbb{R}$.

Insgesamt kennen wir damit folgende Zahlenmengen:

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (Die Menge der natürlichen Zahlen)

$\mathbb{Z} = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (Die Menge der ganzen Zahlen)

$\mathbb{Q} = \{-5{,}8, \frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5{,}3, \frac{12}{29} \ldots\}$ (Die Menge der rationalen Zahlen)

$\mathbb{R} = \{-5{,}8, \frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5{,}3, \frac{12}{29}, \sqrt{10}, \pi, e, \sqrt{2}, -\sqrt{39}, \sqrt{12} \ \ldots\}$ (Die Menge der reellen Zahlen)
Die jeweils betrachtete Zahlenmenge ist also immer auch in der nachfolgenden enthalten.