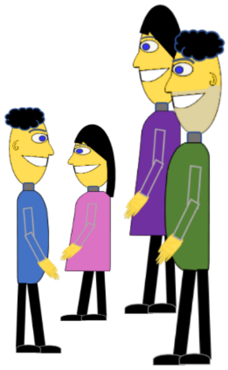
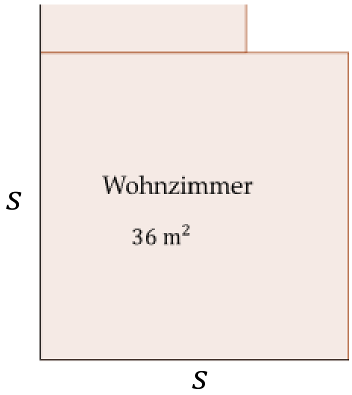
Quadratwurzeln

Definition der Quadratwurzel und die reellen Zahlen

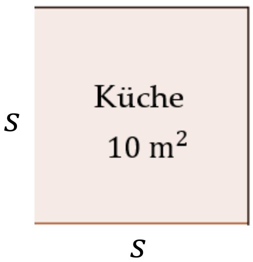
Beispielaufgabe:
Herr Friedrich ist ein großer Fan von Quadraten. Deshalb möchte er ein Haus für seine Familie bauen, in dem der Boden jedes Zimmers die Grundfläche eines Quadrats beschreibt. Im Folgenden sollen die Seitenlängen der jeweiligen Zimmer bestimmt werden.



a) Bestimmen Sie die Seitenlängen s des Wohnzimmerbodens.



b) Bestimmen Sie die Seitenlänge s des Küchenbodens.



Lösung:

Rechnungen in m^2 (Wir schreiben das am Anfang der Aufgabe hin, damit wir die Einheiten in der Rechnung nicht dazu schreiben müssen.)

Zu a) Bestimmen Sie die Seitenlängen s des Wohnzimmerbodens.

Die Flächeninhaltsformel für ein Quadrat lautet $A = s^2$. Wir wissen, dass der Wert A gleich 36 ist, also gilt:

$36 = s^2$

Nun geht es darum eine positive Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert den Wert 36 ergibt:

$1 \cdot 1 = 1^2 = 1$
$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$
$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$
$6 \cdot 6 = 6^2 = 36$

Wir erkennen, dass die Zahl 6 diese Bedingung erfüllt. Damit gilt $s = 6$ und wir haben die Lösung gefunden.

Antwort: Die Seitenlängen s des Wohnzimmerbodens betragen $s = 6$ Meter.

Den Wert s nennt man in diesem Zusammenhang nun die Quadratwurzel von 36, da 6 zum Quadrat gleich 36 ist. Man schreibt das dann so hin.

$\sqrt{36} = 6$

Wir bestimmen zusätzlich noch die Quadratwurzel von 25.

Es gilt $25 = s^2$.
Nun geht es darum eine positive Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert den Wert 25 ergibt:

$1 \cdot 1 = 1^2 = 1$
$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$
$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$

Wir erkennen, dass die Zahl 5 diese Bedingung erfüllt. Damit gilt $s = 5$ und wir haben die Lösung gefunden.

Den Wert s nennt man in diesem Zusammenhang nun die Quadratwurzel von 25, da 5 Quadrat gleich 25 ist. Man schreibt das dann so hin:

$\sqrt{25} = 5$

Merke: Definition der Quadratwurzel

Gegeben ist eine Zahl $r \in \mathbb{Q}_0^+$. Diejenige nichtnegative Zahl x, deren Quadrat r ergibt nennt man die Quadratwurzel von r, kurz $\sqrt{r}$ und es gilt $\sqrt{r} = x$.

Der Wert r wird dabei als Radikand bezeichnet.

In unserem Beispiel folgt damit aus

$36 = 6^2$,

dass

$\sqrt{36} = 6$

gilt. Damit ist 6 die Quadratwurzel von 36.

Die Seitenlänge der Zimmerböden aus unserem Beispiel waren also die Quadratwurzel des Flächeninhalts der Zimmerböden.

Analog ist 5 die Quadratwurzel von 25,

also

$\sqrt{25} = 5$.

Zu b) Bestimmen Sie die Seitenlänge s des Küchenbodens.

Es gilt wieder $A = s^2$ und damit $10 = s^2$.
Nun geht es darum eine positive Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert den Wert 10 ergibt:

$1 \cdot 1 = 1^2 = 1$
$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$
Wir erkennen, dass es keine ganzzahlige Lösung für das Problem gibt. Die Zahl muss jedoch zwischen 3 und 4 liegen, da $3^2 = 9$ kleiner als 10 ist und $4^2 = 16$ größer als 10 ist. Also testen wir Zahlen dazwischen aus.

$3{,}1 \cdot 3{,}1 = 3{,}1^2 = 9{,}61$
$3{,}2 \cdot 3{,}2 = 3{,}2^2 = 10{,}24$
Die gesuchte Lösung liegt zwischen den Werten 3,1 und 3,2, da die Zahl 10 zwischen deren berechneten Quadraten liegt. Nun könnte man wiederum Zahlen testen, die zwischen diesen beiden Zahlen liegen und würde mit dieser Logik einen immer genaueren Wert bekommen.

Tippen wir in unserem Taschenrechner die Tasten $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{1}\boxed{0}$ und $\boxed{=}$, dann erhalten wir mit 3,16227766 eine weitere Näherung. Tatsächlich ist $\sqrt{10}$ eine unendlich lange Zahl.

Die Näherung für die ersten 30 Nachkommastellen ist beispielsweise

$\sqrt{10}$ =3,162277660168379331998893544327. Da die Zahl unendlich lang ist, aber sich durch keine feste Zahlenfolge, wie z.B. $\frac{1}{3} = 0{,}3333333333333333333$ ... beschreiben lässt, können wir $\sqrt{10}$ auch nicht als Bruch darstellen.

Die bisher bekannte Zahlenmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ beinhaltet aber gerade alle Zahlen, die sich auch als Bruch darstellen lassen.

Man nennt Zahlen, wie zum Beispiel $\sqrt{10}$, deshalb auch irrationale Zahlen, also Zahlen, die sich eben genau nicht als Bruch darstellen lassen. Dazu gehört beispielsweise auch die Zahl Pi (Man schreibt dafür den Buchstaben π). Diese hat die den Näherungswert $\pi \approx 3{,}141592654$.

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (z.B. $\frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5{,}3, \frac{12}{29}$ ...) und die Menge der irrationalen Zahlen (z.B. $\sqrt{10}$, π, die eulersche Zahl e, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{39}$, $\sqrt{12}$) kann man zusammenfassend als Menge der “reellen Zahlen“ beschreiben. Dafür ist die abkürzende Schreibweise $\mathbb{R}$.

Insgesamt kennen wir damit folgende Zahlenmengen:

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (Die Menge der natürlichen Zahlen)

$\mathbb{Z} = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (Die Menge der ganzen Zahlen)

$\mathbb{Q} = \{-5, 8, \frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5, 3, \frac{12}{29} \ldots\}$ (Die Menge der rationalen Zahlen)

$\mathbb{R} = \{-5, 8, \frac{1}{10}, -5, \frac{13}{8}, 5, 3, \frac{12}{29}, \sqrt{10}, \pi, e, \sqrt{2}, -\sqrt{39}, \sqrt{12} \ \ldots\}$ (Die Menge der reellen Zahlen)

Die jeweils betrachtete Zahlenmenge ist also immer auch in der nachfolgenden enthalten.