Quadratwurzeln

Irrationalität von der Quadratwurzel aus 2

Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist:

Wir behaupten, dass $\sqrt{2}$ rational ist und bringen diese Aussage zum Widerspruch.
$\sqrt{2}$ ist rational → $\sqrt{2}$ kann durch einen Bruch dargestellt werden kann.

Es gibt also zwei teilerfremde ganze Zahlen p und q, so dass gilt

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Wichtig für unseren Beweis ist, dass p und q teilerfremde Zahlen sind. Das bedeutet, dass $\frac{p}{q}$ einen vollständig gekürzten Bruch darstellt. (z.B. $\frac{3}{2}.\frac{29}{20},\frac{127}{90}\ldots$)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow\; 2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad |\cdot q^2$$

$$2q^2 = p^2 \qquad |:2$$

$$q^2 = \frac{p^2}{2}$$

- ➔ p^2 ist durch 2 teilbar.
- ➔ p ist durch 2 teilbar.
- ➔ p^2 ist durch 4 teilbar.
- ➔ Wegen $2 \cdot q^2 = p^2$ ist auch $2 \cdot q^2$ durch 4 teilbar.
- ➔ q^2 ist durch 2 teilbar.
- ➔ q ist durch 2 teilbar. (Nach der gleichen Logik wie für p)
- ➔ Widerspruch zur Annahme, dass es teilfremde p und q gibt, die $\sqrt{2}$ beschreiben können.
- ➔ $\sqrt{2}$ muss irrational sein.

Eine ausführliche Version gibt es im Skript weiter unten.