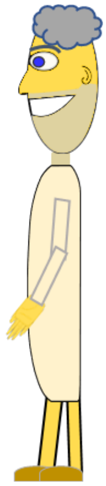
Quadratwurzeln

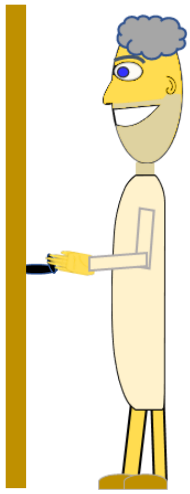
Irrationalität von der Quadratwurzel aus 2

Wir haben bereits gelernt, dass sich Zahlen, wie zum Beispiel $\sqrt{10}$ oder π nicht als Bruch darstellen lassen. Diese Zahlen werden als irrational bezeichnet. Um zu zeigen, dass eine Zahl irrational ist, gibt es bestimmte Beweismethoden. Manche davon wurden schon vor tausenden Jahren geführt.



So ist zum Beispiel ein Beweis des griechischen Mathematikers Euklid von Alexandria überliefert, der wahrscheinlich ca. 300 Jahre vor Christus gelebt hat. Bei diesem Beweis geht es um die Irrationalität von $\sqrt{2}$. Und so einen ähnlichen Beweis werden wir im Folgenden auch führen.

Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann man relativ einfach mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises durchführen. Bei einer solchen Art der Beweisführung wird in der Regel eine Behauptung aufgestellt und diese widerlegt. Dadurch zeigt man dann, dass das Gegenteil gilt.



Behauptet man zum Beispiel fälschlicherweise, dass eine Türe verschlossen ist, dann kann man diese Behauptung widerlegen, indem man die Türklinke betätigt und zeigt, dass das Gegenteil gilt, also, dass sie offen ist.

Analog führen wir den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$. Wir behaupten, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und zeigen dann, dass das nicht sein kann. Die Schlussfolgerung muss dann sein, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Wie bei der Tür (offen/abgeschlossen) gibt es nur zwei Möglichkeiten (rational/irrational).

Der Beweis:

Wir behaupten, dass $\sqrt{2}$ rational ist. Das bedeutet, dass $\sqrt{2}$ durch einen Bruch dargestellt werden kann. Es gibt also zwei teilerfremde ganze Zahlen p und q, so dass gilt

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Wichtig für unseren Beweis ist, dass p und q teilerfremde Zahlen sind. Das bedeutet, dass $\frac{p}{q}$ einen vollständig gekürzten Bruch darstellt. (z.B. $\frac{3}{2}, \frac{29}{20}, \frac{127}{90} \dots$)

<u>Zum besseren Verständnis:</u>

Man kann beispielsweise 0,1 durch den Bruch $\frac{1}{10}$ darstellen. Allerdings könnte man 0,1 auch durch $\frac{2}{20}$ oder $\frac{40}{400}$ darstellen. Diese Brüche kann man jedoch kürzen.

Der einzige vollständig gekürzte Bruch, der die Zahl 0,1 ausdrückt, ist $\frac{1}{10}$.

Nun wird auf beiden Seiten quadriert:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad |\ ^2$$

$$\sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

<u>Zum besseren Verständnis:</u>

Diese Umformung muss zunächst einmal nachvollzogen werden. Dazu betrachten wir

$$\sqrt{25} = 5.$$

Aus dem letzten Kapitel wissen wir, dass die Quadratwurzel von 25 gleich 5 ist. Das haben wir dadurch bestimmt, weil wir wussten, dass 25 entsteht, wenn 5 mit sich selbst multipliziert wird, also weil $25 = 5^2$ gilt.

Damit folgt aus

$$\sqrt{25} = 5,$$

dass $25 = 5^2$ gilt.

Damit folgt für $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

auch, dass $2 = \frac{p^2}{q^2}$ gilt.

Übrigens: $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ und $\frac{p^2}{q^2}$ ist das Gleiche (Folgt aus den Potenzgesetzen).

Wir formen nun die Gleichung nochmal um, indem wir beidseitig mit q^2 multiplizieren und anschließend durch 2 teilen.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad | \cdot q^2$$

$$2q^2 = p^2 \qquad | : 2$$

$$q^2 = \frac{p^2}{2}$$

Wenn also p^2 durch zwei geteilt wird, dann erhalten wir q^2. Das bedeutet, dass p^2 doppelt so groß wie q^2 ist.

Wenn eine Zahl doppelt so groß, wie eine andere Zahl ist, dann bedeutet das aber wiederum, dass diese Zahl dann gerade sein muss.

Zum besseren Verständnis:

6 ist doppelt so groß wie 3.

Es gilt: $6 = 2 \cdot 3$ also ist 6 gerade.

18 ist doppelt so groß wie 9.

Es gilt: $18 = 2 \cdot 9$ also ist 18 gerade.

Doppelt so groß bedeutet eben genau, dass man eine Zahl mal 2 nehmen muss, um die doppelt so große Zahl zu erhalten.

Merke:

Immer, wenn eine ganze Zahl doppelt so groß wie eine andere ganze Zahl ist, dann muss diese Zahl gerade sein.

Wenn p^2 gerade ist, dann muss auch p gerade sein, denn nur gerade Zahlen sind quadriert auch wieder gerade. (Das kann man auch anhand der Primfaktorzerlegung einer Zahl sehen)

Zum besseren Verständnis:

$9 = 3^2 = 3 \cdot 3$

Da $9 = 3 \cdot 3$ nicht durch 2 teilbar ist, ist auch schon 3 nicht durch 2 teilbar.

$16 = 4^2 = 4 \cdot 4$

Da $16 = 4 \cdot 4$ durch 2 teilbar ist, ist natürlich auch schon 4 durch 2 teilbar.

$25 = 5^2 = 5 \cdot 5$ Da $25 = 5 \cdot 5$ nicht durch 2 teilbar ist, ist auch schon 5 nicht durch 2 teilbar.

Also haben wir bisher:

$q^2 = \frac{p^2}{2}$

- ➔ p^2 ist durch 2 teilbar.
- ➔ p ist durch 2 teilbar.

Wenn p durch 2 teilbar ist, dann muss $p \cdot p$ durch 4 teilbar sein, denn jedes p und damit jeder Faktor des Produktes ist durch 2 teilbar.

Beispiel:

6 ist durch 2 teilbar, also ist $6 \cdot 6 = 36$ durch 4 teilbar.
Es gilt ja $6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$.
10 ist durch 2 teilbar, also ist $10 \cdot 10 = 100$ durch 4 teilbar.
Es gilt nämlich $10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$.

- ➔ p^2 ist durch 4 teilbar.

Bei unserer Umformung hatten wir

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad | \cdot q^2$$

$$2q^2 = p^2 \qquad | : 2$$

$$q^2 = \frac{p^2}{2}$$

Wenn also p^2 durch 4 teilbar ist, dann muss wegen dem Gleichheitszeichen auch $2q^2$ durch 4 teilbar sein.

- ➔ Wegen $2 \cdot q^2 = p^2$ ist auch $2 \cdot q^2$ durch 4 teilbar.
- ➔ q^2 ist durch 2 teilbar, denn eine zwei muss noch in der Primfaktorzerlegung von q^2 auftauchen, damit $2 \cdot q^2$ durch 4 teilbar ist.
- ➔ q ist durch 2 teilbar. (Nach der gleichen Logik wie für p)

Also sind sowohl p als auch q durch 2 teilbar.

Aber es gilt: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ soll ein vollständig gekürzter Bruch sein.

Wenn bei einem vollständig gekürzten Bruch der Zähler und der Nenner durch zwei teilbar sind, dann kann jedoch mit 2 gekürzt werden.

Es handelt sich also nicht um einen Bruch bei dem q und p teilerfremd sind, wenn $\sqrt{2}$ durch $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann. Also kann $\sqrt{2}$ nicht durch solch einen Bruch dargestellt werden.

Und immer, wenn man eine Behauptung aufstellt und dann herausfindet, dass etwas gilt, dass gar nicht gelten dürfte, dann muss die Behauptung selbst schon falsch sein.

- ➔ $\sqrt{2}$ kann nicht rational sein.
- ➔ $\sqrt{2}$ kann muss irrational sein.

Zusammenfassend:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad | \cdot q^2$$

$$2q^2 = p^2 \qquad | : 2$$

$$q^2 = \frac{p^2}{2}$$

- ➔ p^2 ist durch 2 teilbar.
- ➔ p ist durch 2 teilbar.
- ➔ p^2 ist durch 4 teilbar.
- ➔ Wegen $2 \cdot q^2 = p^2$ ist auch $2 \cdot q^2$ durch 4 teilbar.
- ➔ q^2 ist durch 2 teilbar.
- ➔ q ist durch 2 teilbar. (Nach der gleichen Logik wie für p)
- ➔ Widerspruch zur Annahme, dass es teilfremde p und q gibt, die $\sqrt{2}$ beschreiben können.
- ➔ $\sqrt{2}$ muss irrational sein.

Aufgabe zum Üben:

Zeigen Sie, dass $\sqrt{6}$ irrational ist.

Lösung:

Behauptung: $\sqrt{6}$ ist rational.

Es gibt also zwei teilerfremde ganze Zahlen p und q, so dass gilt

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q}.$$

$$\rightarrow 6 = \frac{p^2}{q^2} \qquad | \cdot q^2$$

$$6q^2 = p^2 \qquad |:6$$

$$q^2 = \frac{p^2}{6}$$

- ➔ p^2 ist durch 6 teilbar.
- ➔ p^2 ist durch 2 (und durch 3) teilbar.
- ➔ p ist durch 2 teilbar.
- ➔ p^2 ist durch 4 teilbar.
- ➔ Wegen $6 \cdot q^2 = p^2$ ist auch $6 \cdot q^2$ durch 4 teilbar.
- ➔ Da $6 = 2 \cdot 3$ durch 2 teilbar ist, muss q^2 durch 2 teilbar sein.
- ➔ q ist durch 2 teilbar. (Nach der gleichen Logik wie für p)
- ➔ Widerspruch zur Annahme, dass es teilfremde p und q gibt, die $\sqrt{6}$ beschreiben können.
- ➔ $\sqrt{6}$ muss irrational sein.