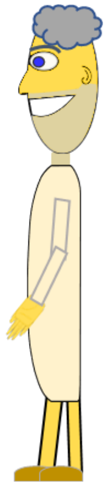
Quadratwurzeln

Das Heron-Verfahren zum Nähern von Quadratwurzeln

Wir haben bereits gelernt, dass Zahlen, wie $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{6}$, irrational sind. Diese Zahlen können nicht als Bruch dargestellt werden und nur durch eine unendlich lange sich nicht wiederholende Zahlenfolge beschrieben werden.



So ist zum Beispiel die Quadratwurzel aus 2 folgendermaßen beschrieben:

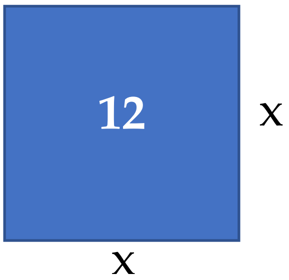
$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ ...$

Die Zahlenfolge kann dabei beliebig lang weitergeführt werden.

Bereits im 1. Jahrhundert vor Christus hat der berühmte Wissenschaftler Heron von Alexandria ein Verfahren entwickelt, mit dem man die Quadratwurzel einer Zahl beliebig nähern kann.

Tatsächlich wurde das Verfahren ca. 2000 Jahre vorher bereits von den Babyloniern verwendet. Und dieses werden wir im Folgenden auch mit Hilfe eines Beispiels lernen.

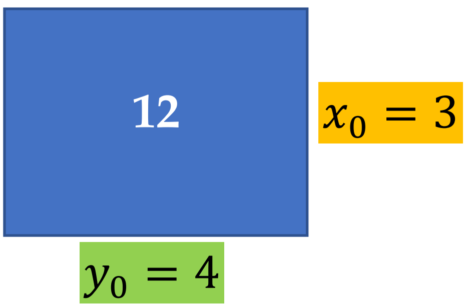
Wir betrachten, wie im Kapitel „Quadratwurzeln“, ein Quadrat mit einem bestimmten Flächeninhalt. In diesem Fall soll der Flächeninhalt gleich 12 m^2 sein. Im Folgenden wird jedoch einheitslos gerechnet.



Für die Flächeninhaltsformel des Quadrates gilt: $A = x^2$.
Bestimmt werden soll nun die Länge x, für die gilt: $12 = x^2$.

Anders ausgedrückt suchen wir die Quadratwurzel aus 12, also $\sqrt{12}$. Die Zahl, die unter der Wurzel steht, wird dabei als Radikand bezeichnet. Hier hat der Radikand den Wert 12.

Da wir x nicht kennen, nähern wir die Seitenlängen so gut wie möglich. Wir nehmen zum Beispiel als erste Näherung das Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4, da hier der Flächeninhalt $A = 3 \cdot 4 = 12$ [m²] ist. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Längen mit $x_0 = 3$ und $y_0 = 4$.



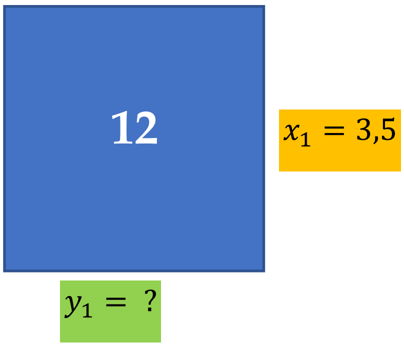
Es ist dabei zunächst nicht wichtig mit welchen Starwerten wir genau beginnen, wichtig ist, dass das Produkt der Werte 12 ergeben muss ($x_0 = 2$ und $y_0 = 6$ oder $x_0 = 1$ und $y_0 = 12$ wären auch mögliche Startwerte.) Allerdings benötigt man deutlich mehr Schritte, um das gewünschte Ergebnis zu erreichen, je ungenauer die Startwerte sind.

Um ausgehend von einem Rechteck die Seitenlängen eines flächeninhaltsgleichen Quadrates zu näheren, gibt es einen recht einfachen Trick. Es geht dabei darum zwei sich wiederholende Schritte immer wieder durchzuführen, bis das gewünschte Ergebnis erreicht wird.

1. Berechne das arithmetische Mittel der Seitenlängen.

Man rechnet einfach das arithmetische Mittel der Seitenlängen des Rechtecks aus und erhält:

$x_1 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$

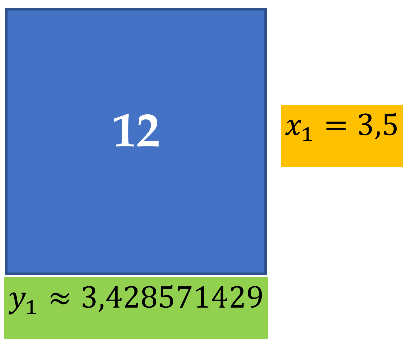


Möchte man nun ein entsprechendes Rechteck beschreiben, dann muss die zweite Seitenlänge noch bestimmt werden.

2. Berechne y_1 aus der Flächeninhaltsformel.

Da allgemein für den Flächeninhalt eines Rechtecks gilt $A = x_1 \cdot y_1$, können wir die Werte einsetzen und erhalten: $12 = 3{,}5 \cdot y_1$.

Der Wert y_1 kann nun mit dem Taschenrechner einfach berechnet werden:
$y_1 = \frac{12}{3{,}5} \approx 3{,}428571429$



Damit haben wir ein Rechteck erhalt, das schon sehr ähnlich zu dem entsprechenden Quadrat aussieht. Tatsächlich kann man zeigen, dass der gesuchte Wert (hier: $\sqrt{12}$) zwischen den beiden Seitenlängen liegt.

→$\sqrt{12}$ liegt im Intervall [3,428571429; 3,5] (Erklärung im Video)

Möchten wir eine noch bessere Näherung erhalten, dann müssen wir die Schritte 1. und 2. einfach nur wiederholen. Und diese Art der Wiederholungen sind im Folgenden in einer Tabelle zusammengetragen.

1. Berechne das arithmetische Mittel der Seitenlängen:	2. Berechne den y-Wert aus der Flächeninhaltsformel:	$\sqrt{12}$ liegt nun im folgenden Intervall:
$x_1 = \frac{3+4}{2}$ $= 3{,}5$	$y_1 = \frac{12}{3{,}5}$ $\approx 3{,}428571429$	[3,428571429; 3,5]
$x_2 = \frac{3{,}428571429 + 3{,}5}{2}$ $\approx 3{,}464285715$	$y_2 = \frac{12}{3{,}464285715}$ $\approx 3{,}463917526$	[3,463917526; 3,464285715]
$x_3 = \frac{3{,}463917526 + 3{,}464285715}{2}$ $\approx 3{,}464101621$	$y_3 = \frac{12}{3{,}464101621}$ $\approx 3{,}464101610$	[3,464101610 ; 3,464101621]
$x_4 = \frac{3{,}464101610 + 3{,}464101621}{2}$ $\approx 3{,}464101616$	$y_4 = \frac{12}{3{,}464101616}$ $\approx 3{,}464101614$	[3,464101614 ; 3,464101616]
$x_5 = \frac{3{,}464101614 + 3{,}464101616}{2}$ $\approx 3{,}464101615$	$y_5 = \frac{12}{3{,}464101615}$ $\approx 3{,}464101615$	[3,464101615 ; 3,464101615]

Die Anzahl an übereinstimmenden Ziffern von x_n und y_n geben an auf wie viele Stellen genau die Näherung der Wurzel schon mindestens bestimmt wurde. Auf Grund der Endlichkeit der Taschenrechnerziffern, ändern sich die Werte ab einem bestimmten Schritt nicht mehr.

Damit wurde $\sqrt{12}$ auf Taschenrechnergenauigkeit bestimmt.