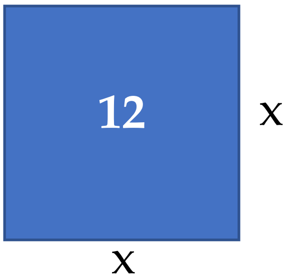
Quadratwurzeln

Das Heron-Verfahren zum Nähern von Quadratwurzeln

Wir betrachten, wie im Kapitel „Quadratwurzeln“, ein Quadrat mit einem bestimmten Flächeninhalt. In diesem Fall soll der Flächeninhalt gleich 12 m^2 sein. Im Folgenden wird einheitslos gerechnet.



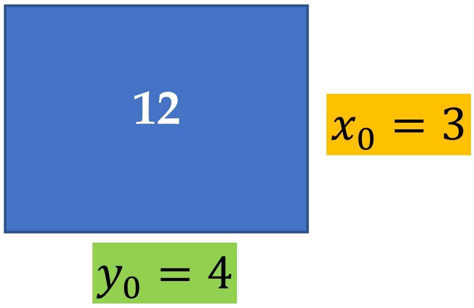
Es gilt: $A = x^2$.
hier: $12 = x^2$.

Anders ausgedrückt suchen wir die Quadratwurzel aus 12, also $\sqrt{12}$. Die Zahl, die unter der Wurzel steht, wird dabei als Radikand bezeichnet. Hier hat der Radikand den Wert 12.

Wir nähern die Seitenlängen zunächst:

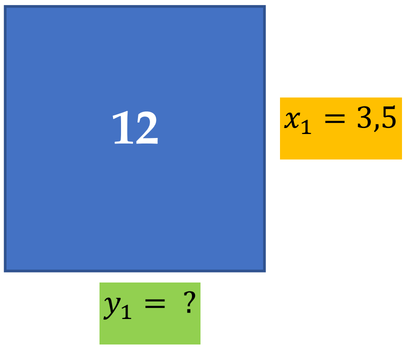
$x_0 = 3$ und $y_0 = 4$ → $A = 3 \cdot 4 = 12$ [m²]

WICHTIG: Das <u>Produkt</u> der genäherten Seitenlängen muss <u>unbedingt 12</u> ergeben!



1. <u>Berechne das arithmetische Mittel der Seitenlängen.</u>

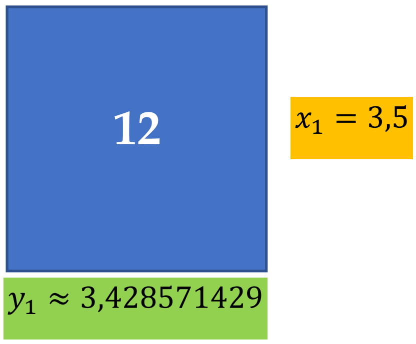
$$x_1 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$$



2. <u>Berechne y_1 aus der Flächeninhaltsformel.</u>

Es gilt: $12 = 3{,}5 \cdot y_1$.

→ $y_1 = \frac{12}{3{,}5} \approx 3{,}428571429$



Damit haben wir ein Rechteck erhalt, das schon sehr ähnlich zu dem entsprechenden Quadrat aussieht. Tatsächlich kann man zeigen, dass der gesuchte Wert (hier: $\sqrt{12}$) zwischen den beiden Seitenlängen liegt.

→ $\sqrt{12}$ liegt im Intervall [3,428571429; 3,5] (Erklärung im Video)

Möchten wir eine noch bessere Näherung erhalten, dann müssen wir die Schritte 1. und 2. einfach nur wiederholen. Und diese Art der Wiederholungen sind im Folgenden in einer Tabelle zusammengetragen.

1. Berechne das arithmetische Mittel der Seitenlängen:	2. Berechne den y-Wert aus der Flächeninhaltsformel:	$\sqrt{12}$ liegt nun im folgenden Intervall:
$x_1 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$	$y_1 = \frac{12}{3{,}5} \approx 3{,}428571429$	[3,428571429; 3,5]
$x_2 = \frac{3{,}428571429 + 3{,}5}{2} \approx 3{,}464285715$	$y_2 = \frac{12}{3{,}464285715} \approx 3{,}463917526$	[3,463917526; 3,464285715]
$x_3 = \frac{3{,}463917526 + 3{,}464285715}{2} \approx 3{,}464101621$	$y_3 = \frac{12}{3{,}464101621} \approx 3{,}464101610$	[3,464101610 ; 3,464101621]
$x_4 = \frac{3{,}464101610 + 3{,}464101621}{2} \approx 3{,}464101616$	$y_4 = \frac{12}{3{,}464101616} \approx 3{,}464101614$	[3,464101614 ; 3,464101616]
$x_5 = \frac{3{,}464101614 + 3{,}464101616}{2} \approx 3{,}464101615$	$y_5 = \frac{12}{3{,}464101615} \approx 3{,}464101615$	[3,464101615 ; 3,464101615]

Die Anzahl an übereinstimmenden Ziffern von x_n und y_n geben an auf wie viele Stellen genau die Näherung der Wurzel schon mindestens bestimmt wurde. Auf Grund der Endlichkeit der Taschenrechnerziffern, ändern sich die Werte ab einem bestimmten Schritt nicht mehr.

Damit wurde $\sqrt{12}$ auf Taschenrechnergenauigkeit bestimmt.