Quadratwurzeln

Wurzelterme zusammenfassen

Aufgabe 1:

Fassen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich zusammen.

a) $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{20}$
d) $2\sqrt{x} + \sqrt{9x},\ x \geq 0$

Aufgabe 2:

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich.

a) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$
b) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1},\ x \geq 1$
c) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$
d) $\frac{\sqrt{2a^2b}}{\sqrt{2b}}$ mit $a, b > 0$

Lösungen:

Aufgabe 1

Zu a)

$2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

Analog zum Rechnen mit Variablen ist es nur möglich Wurzelausdrücke zu addieren, bei denen der Radikand den gleichen Wert hat. Zur Verdeutlichung werden wir den Wurzelausdrücken deswegen im Folgenden jeweils Farben zuordnen.

$2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Die Umformung ist auf das Distributivgesetz zurückzuführen,

da aus der Summe $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ der Wert $\sqrt{2}$ ausgeklammert werden kann.

$2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \sqrt{2}(2 + 5) = \sqrt{2} \cdot 7 = 7\sqrt{2}$

Zu b)

$\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

Bei Differenzen wird nach der gleichen Logik vorgegangen.

$\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

Merke:

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$

$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c}$

Zu c)

$2\sqrt{5} + 3\sqrt{20}$

Bei Aufgabe c) stehen wir nun vor dem Problem, dass die Radikanden unterschiedlich sind. Deswegen sind die Wurzelterme auch verschiedenfarbig gekennzeichnet. In diesem Fall können wir uns jedoch mit dem teilweisen Radizieren weiterhelfen. Dabei müssen die Radikanden zunächst in ihre Primfaktoren zerlegt werden.

$2\sqrt{5} + 3\sqrt{20} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2 \cdot 5}$

Analog zu den Potenzgesetzen gilt nun für Wurzelterme:

Merke

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Damit folgt:

$2\sqrt{5} + 3\sqrt{20} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} =$

$\sqrt{2^2}$ ist dann 2, denn wenn man eine nichtnegative Zahl quadriert und dann die Wurzel zieht, erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Genauer: 2 zum Quadrat ist 4. Zieht man nun die Wurzel aus 4, dann ist diejenige nichtnegative Zahl gesucht, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt, also die 2. Diese Logik funktioniert natürlich mit jeder nichtnegativen Zahl. Damit folgt:

$2\sqrt{5} + 3\sqrt{20} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} =$

$2\sqrt{5} + 3 \, 2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

Zu d)

$2\sqrt{x} + \sqrt{9x},\ x \geq 0$

Beim Rechnen mit Variablen kann analog zu Aufgabe 1c) vorgegangen werden.

$2\sqrt{x} + \sqrt{9x} = 2\sqrt{x} + \sqrt{3^2 x} = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 5\,\sqrt{x}$

Aufgabe 2

Zu a)

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{3}^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 3 - 2\cdot\sqrt{2\cdot 3} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

Dabei haben wir die 2.binomische Formel verwendet: $(a-b)^2 = a^2 + 2ab - b^2$

Zu b)

$$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} = \sqrt{x^2-1^2} = \sqrt{x^2-1}$$

Dabei haben wir die 3.binomische Formel verwendet: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Zu c)

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

Merke:

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Zu d)

$$\frac{\sqrt{2a^2b}}{\sqrt{2b}} = \sqrt{\frac{2a^2b}{2b}} = \sqrt{a^2} = a$$

Zusammenfassung:

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ gilt:
$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$
$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$
Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:
$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt:
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$