Inhaltsverzeichnis

Elementare gebrochen-rationale Funktionen, Definitionsmenge und Asymptoten

Merke:

Allgemein nennt man eine auf ihrer maximalen Definitionsmenge gegebene Funktion f der Form $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$

eine elementare gebrochen-rationale Funktion.

Der Graph G_f der Funktion wird als Hyperbel bezeichnet.

Wir betrachten im Folgenden die Definitionsmenge der betrachteten Funktion f mit $f_1(x) = \frac{4}{x-0,5}$.

Immer, wenn der Nenner eines Bruchs durch Einsetzten eines x-Wertes Null werden würde, dann muss genau dieser Wert aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

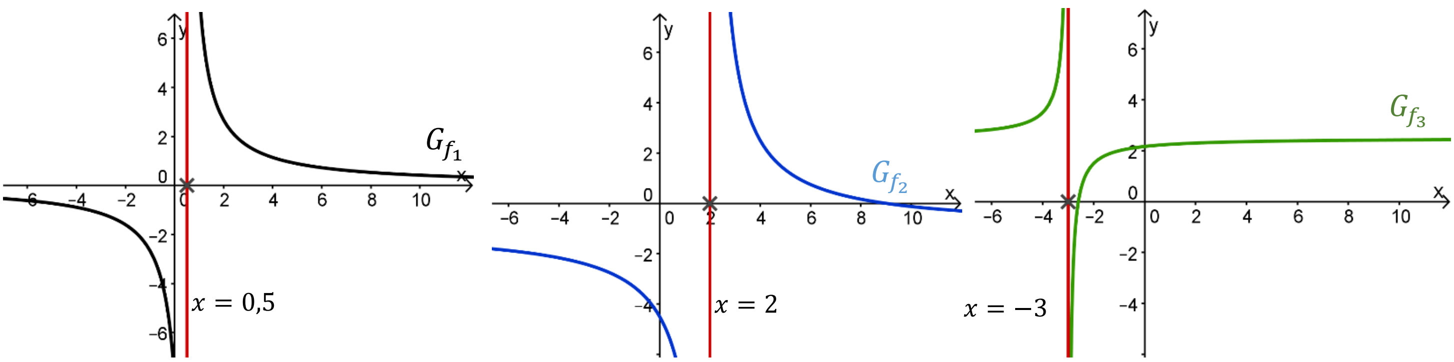
Die Definitionsmenge lautet also $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0,5\}$ (sprich: „Q ohne 0,5").

Weitere Beispiele:

$f_2(x) = \frac{7}{x-2} - 1$ $\qquad$ $\mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$

$f_3(x) = \frac{-1}{x+3} + 2,5$ $\qquad$ $\mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{Q}\backslash\{-3\}$

Wir betraten nun die entsprechenden Funktionsgraphen an den Stellen der Definitionslücke. Die Graphen der Funktionen sind an den Stellen der Definitionslücke nicht definiert, weshalb sich an diesen Stellen kein Punkt des Funktionsgraphen befinden kann. Dies kennzeichnet man, indem man eine



senkrechte Gerade einzeichnet.

Diese senkrechte Gerade nennt man eine senkrechte Asymptote des Graphen an der Stelle $x = b$.

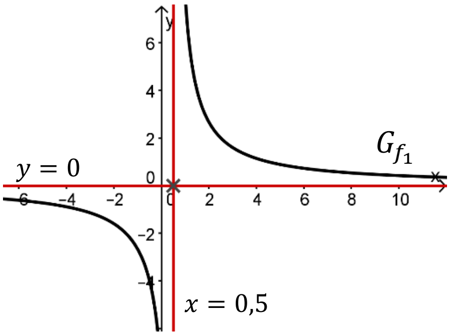
Hier:

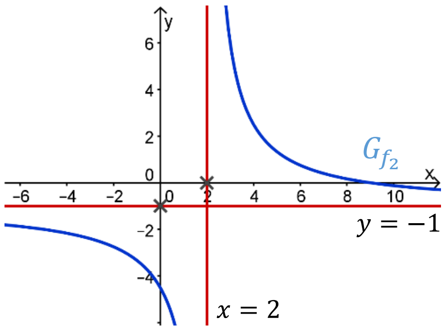
G_{f_1} hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 0{,}5$.

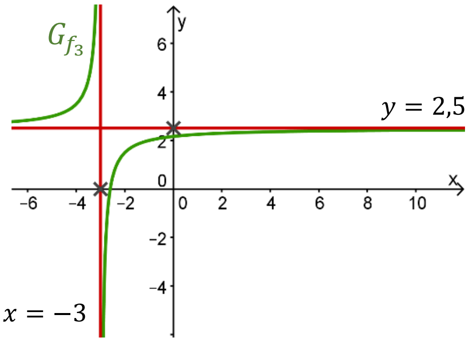
G_{f_2} hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 2$.

G_{f_3} hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = -3$.

Doch auch an den linken und rechten Rändern scheinen die Funktionsgraphen sich ähnlich zu verhalten. Hier kann man ebenfalls eine Asymptote einzeichnen.







Wir betrachten dazu nochmal die Funktionsterme:

$f_1(x) = \frac{4}{x-0{,}5} + 0$; $f_2(x) = \frac{7}{x-2} - 1$; $f_3(x) = \frac{-1}{x+3} + 2{,}5$;

Hat man eine Funktion, wie beispielsweise $f(x) = \frac{3}{x+1} - 2$ gegeben, dann weiß man, dass

- die Definitionsmenge durch den Nenner bestimmt wird ($\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$)
- es an der Stelle der sogenannten Definitionslücke eine senkrechte Asymptote mit $x = -1$ gibt.
- durch den Wert c die waagrechte Asymptote festgelegt ist, die die Gleichung $y = -2$ hat.

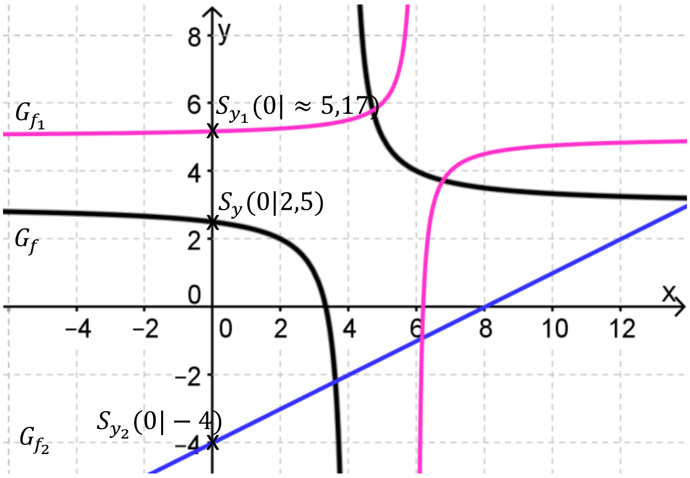
Schnittpunkte von Hyperbeln mit den Koordinatenachsen

Grundlegend muss man zum Bestimmen der Schnittpunkte eines Graphen mit den Koordinatenachsen immer gleich vorgehen.

Wir schauen uns als Beispiel die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x-4} + 3$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\backslash\{4\}$ an.

<u>Schnittpunkt mit der y-Achse:</u>

Betrachtet man den Schnittpunkt mit der y-Achse verschiedener Graphen von Funktion, dann fällt eine Gemeinsamkeit auf:



Die x-Koordinate ist beim Schnittpunkt mit der y-Achsen immer 0.

Statt $f(x) = \frac{2}{x-4} + 3$ können wir auch $y = \frac{2}{x-4} + 3$ schreiben.

Der entsprechende y-Wert ist dann $y = \frac{2}{0-4} + 3 = -0{,}5 + 3 = 2{,}5$. $\rightarrow S_y(0|2{,}5)$

Merke: Schnittpunkt mit der y-Achse

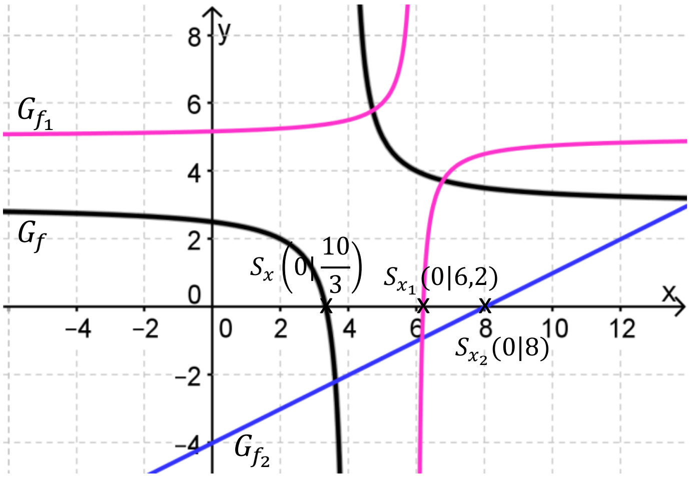
Beim Schnittpunkt eines Graphen mit der y-Achse ist die **x-Koordinate immer 0**.

Möchte man den y-Wert rechnerisch erhalten, dann kann $x = 0$ in die Funktionsgleichung eingesetzt werden.

Beispielaufgabe: $y = \frac{2}{x-4} + 3$

Wir setzen $x = 0$ ein: $y = \frac{2}{0-4} + 3 = -0{,}5 + 3 = 2{,}5$ $\rightarrow S_y(0|2{,}5)$

Betrachtet man den Schnittpunkt mit der x-Achse verschiedener Graphen von Funktion, dann fällt auch wieder eine Gemeinsamkeit auf:



Die y-Koordinate ist beim Schnittpunkt mit der x-Achsen immer 0.

In diesem Fall können wir für y den Wert 0 in die Funktionsgleichung einsetzen.

$0 = \frac{2}{x-4} + 3$

Nun muss die Gleichung noch nach x aufgelöst werden:

$x = \frac{10}{3}$ $\rightarrow S_x(\frac{10}{3}|0)$

Den dabei erhaltenen x-Wert nennt man auch die Nullstelle der Funktion f: $x_1 = \frac{10}{3}$.

Merke: Schnittpunkte mit der x-Achse

Bei den Schnittpunkten eines Graphen mit der x-Achse ist die **y-Koordinate immer 0**.

Möchte man den x-Wert rechnerisch erhalten, dann kann $y = 0$ in die Funktionsgleichung eingesetzt werden.

Beispielaufgabe: $y = \frac{2}{x-4} + 3$

Wir setzten $y = 0$ ein: $0 = \frac{2}{x-4} + 3$ $\rightarrow$ $x = \frac{10}{3}$ $\rightarrow S_y(\frac{10}{3}|0)$

$x = \frac{10}{3}$ ist dabei die Nullstelle der oben gegebenen Funktion f.

Verschiebung von Hyperbeln im Koordinatensystem

Um die Verschiebung von Hyperbeln im Koordinatensystem zu verstehen, muss man sich nur ein paar Beispiele ansehen.

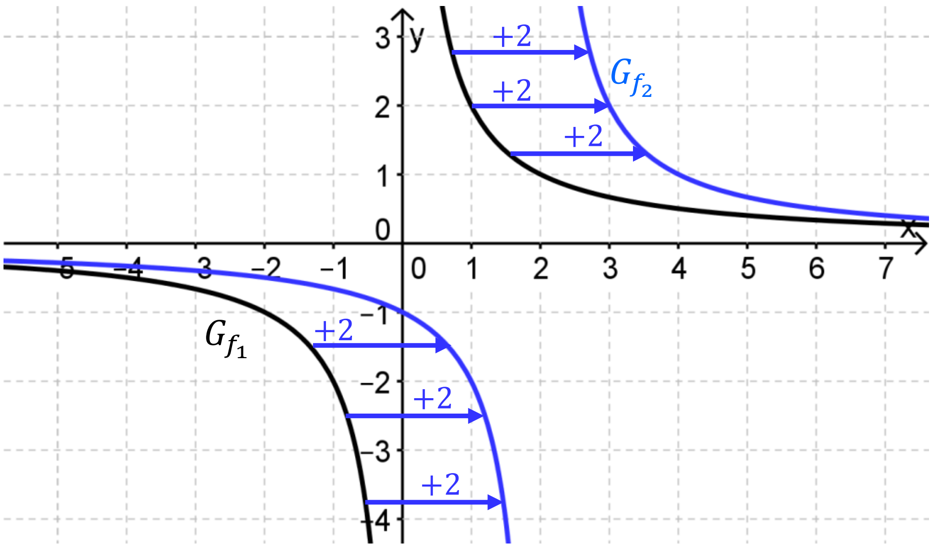
Wiederholung: (Allgemeine Form für elementare gebrochen-rationale Funktionen)
$f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\backslash\{b\}$

Wir betrachten die gegebenen Funktionen f_1 und f_2 mit

$f_1(x) = \frac{2}{x} \qquad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0\},$

$f_2(x) = \frac{2}{x-2} \qquad \mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{Q}\backslash\{2\}.$

Zum besseren Verständnis schauen wir uns die Graphen der Funktionen an.



Man schreibt: Der Graph von f_2 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert $+2$ in Richtung der <u>x-Achse</u> hervor.

Merke:

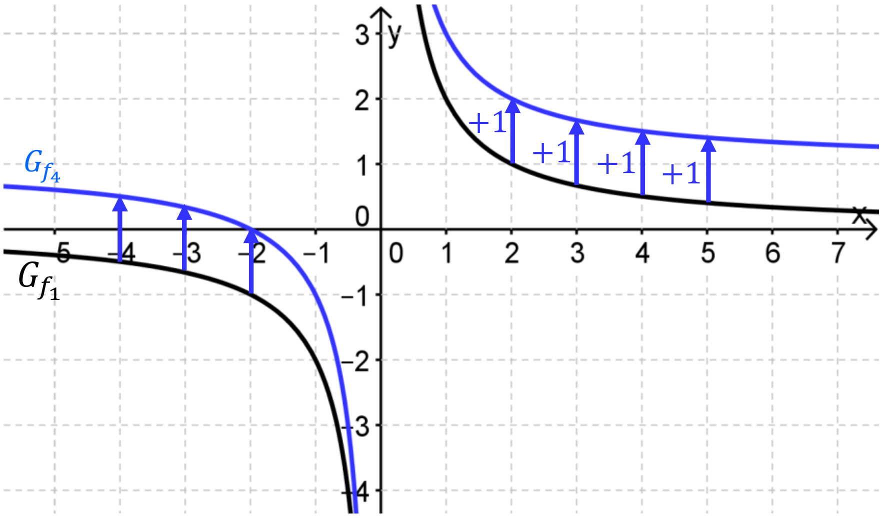
Der Wert b aus der allgemeinen Form für elementare gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\backslash\{b\}$ beschreibt die Verschiebung des Graphen der Funktion $g(x) = \frac{a}{x}$ in Richtung der x-Achse, um den Wert b.

Was der Wert c bewirkt schauen wir uns im Folgenden an.

Um die Verschiebung der Graphen in Richtung der y-Achse besser zu verstehen, betrachten wir die gegebenen Funktionen f_1 und f_4 mit

$f_1(x) = \frac{2}{x} \qquad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ und
$f_4(x) = \frac{2}{x} + 1 \ \ \mathbb{D}_{f_4} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.
Zum besseren Verständnis schauen wir uns die Graphen der Funktionen an.

$f_1(x) = \frac{2}{x} \quad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0\} \qquad\qquad f_4(x) = \frac{2}{x} + 1 \quad \mathbb{D}_{f_4} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$



Man schreibt: Der Graph von f_4 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert $+1$ in Richtung der y-Achse hervor.

Merke:

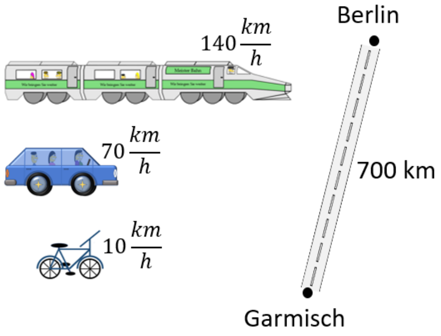
Der Wert c aus der allgemeinen Form für elementare gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\backslash\{b\}$ beschreibt die Verschiebung des Graphen der Funktion $g(x) = \frac{a}{x}$ in Richtung der y-Achse, um den Wert c.

Für zwei gegebene Funktionen f_1 und f_6 mit

$f_1(x) = \frac{2}{x} \qquad (\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0\})$ und
$f_6(x) = \frac{2}{x-3} + 1{,}5 \ (\mathbb{D}_{f_6} = \mathbb{Q}\backslash\{3\})$ gilt damit beispielsweise:

Der Graph von f_6 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert $+3$ in Richtung der x-Achse und durch Verschiebung um den Wert $+1{,}5$ in Richtung der y-Achse hervor.

Indirekt proportionale Größen



Familie Friedrich fährt von Garmisch aus in den Urlaub zu Freunden nach Berlin. Die Strecke beträgt etwa 700 km.

Wenn sie mit dem Zug fahren, dann benötigen sie mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $140\,\frac{km}{h}$ etwa 5 Stunden.

Mit dem Auto dauert die Fahrt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\,\frac{km}{h}$ etwa doppelt so lange, also 10 Stunden.

Bei einer Fahrradtour nach Berlin hätten Sie eine Durchschnittsgeschwindigkeit von nur $14\,\frac{km}{h}$ und würden damit 10 Mal länger als mit dem Zug, also 50 Stunden, fahren. Wir tragen die zusammenhängenden Größen x :=„Durchschnittliche Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$." und y :=„Benötigte Zeit in Stunden." in einer Wertetabelle zusammen.

$\cdot 5$ $\cdot 2$

x: Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	14	70	140
y: Zeit in Stunden	50	10	5

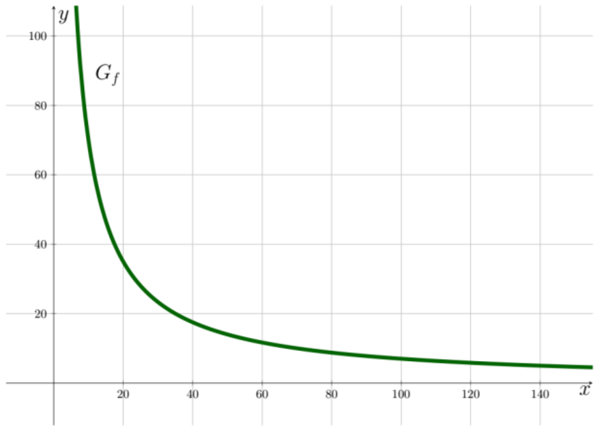
$: 5$ $: 2$

Geschwindigkeit · 2 Fahrzeit : 2

Merke:

Immer, wenn eine Vervielfachung von jedem Wert der einen Größe zu einer Verringerung des entsprechenden Wertes der anderen Größe, um den gleichen Teil führt, dann spricht man von zwei zueinander indirekt proportionalen Größen.

Die zugehörige Funktion f ist eine gebrochen-rationale Funktion und hat die Funktionsvorschrift $f: x \mapsto \frac{700}{x}$ mit $x > 0$. Der Graph dieser Funktion beschreibt einen Teil einer Hyperbel.



Merke:

Zwei indirekt proportionale Größen können durch eine Zuordnung mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto \frac{a}{x}$, $a \neq 0$ beschrieben werden. In diesem Fall spricht man von indirekter Proportionalität.

Beispielaufgaben dazu:

1. Vier Arbeiter benötigen acht Stunden, um die Zimmer eines Hauses zu streichen. Bestimmen Sie, wie viel Stunden drei Arbeiter benötigen würden.
   Lösung:
   Es handelt sich um einen indirekt proportionalen Zusammenhang. Dabei benötigen $x = 4$ Arbeiter $y = 8$ Stunden.

   Es gilt $a = x \cdot y$ (vgl. Herleitung oben)
   Damit folgt: $a = 4 \cdot 8 = 32$
   → $y = \frac{32}{x}$
   Für drei Arbeiter gilt damit: $y = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$

Antwort: Drei Arbeiter benötigen etwa 10,67 Stunden bzw. 10 Stunden und 40 Minuten.

2. Weisen Sie nach, dass die Größen x und y indirekt proportional zueinander sind.

x	1	3	5	10	20
y	30	10	6	3	1,5

   Lösung:
   Wir müssen nachweisen, dass für jedes Wertepaar das Produkt $x \cdot y$ den gleichen Wert ergibt.
   $1 \cdot 30 = 30$; $3 \cdot 10 = 30$; $5 \cdot 6 = 30$; $10 \cdot 3 = 30$; $1{,}5 \cdot 20 = 30$;
   → x und y sind indirekt proportional zueinander.