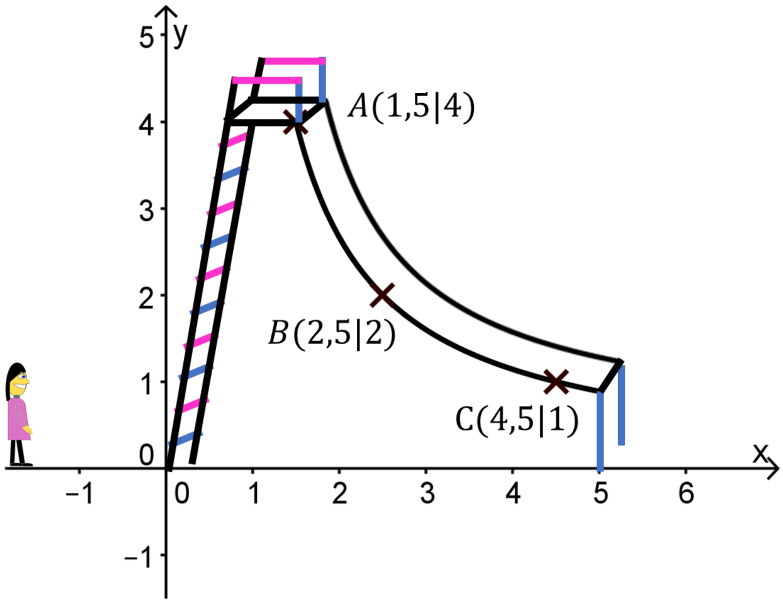
Elementare gebrochen-rationale Funktionen

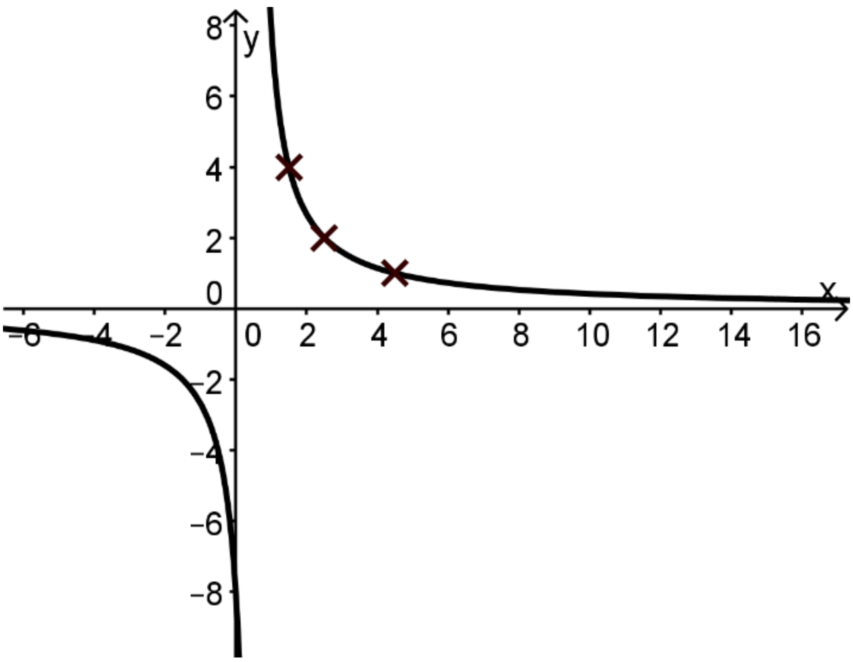
Elementare gebrochen-rationale Funktionen, Definitionsmenge und Asymptoten

Die schlaue Carla geht gerne rutschen. Eines Tages fragt sie sich, ob man den Querschnitt der Rutsche mit Hilfe des Graphen einer Funktion beschreiben kann. Dazu misst sie, beginnend am Anfang der Rutschenleiter, mit Hilfe eines Maßbandes, drei Punkte aus.



Diese teilt sie ihrem Mathematiklehrer Herr Graph mit, der die entsprechende Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{4}{x-0{,}5}$ liefert. Wobei die x- und y-Werte in Metern angegeben werden.

„Den Graphen so einer Funktion nennt man übrigens eine Hyperbel." erklärt Herr Graph.



Merke:

Allgemein nennt man eine auf ihrer maximalen Definitionsmenge gegebene Funktion f der Form $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$

eine elementare gebrochen-rationale Funktion.

Der Graph G_f der Funktion wird als Hyperbel bezeichnet.

Wir betrachten im Folgenden die Definitionsmenge der betrachteten Funktion f mit $f_1(x) = \frac{4}{x-0{,}5}$.

Was wir bereits über Funktionen wissen ist, dass man für jeden x-Wert, den man einsetzt, einen bestimmten y-Wert erhält.

Beispiel:

Für $x = 0$: $y = \frac{4}{0-0{,}5} = -8$

Für $x = 1$: $y = \frac{4}{1-0{,}5} = 8$

Für $x = 2$: $y = \frac{4}{2-0{,}5} = \frac{8}{3}$

Diese Werte kann man dann auch in einer Wertetabelle zusammenfassen:

x	0	1	2
y	-8	8	$\frac{8}{3} \approx 2{,}67$

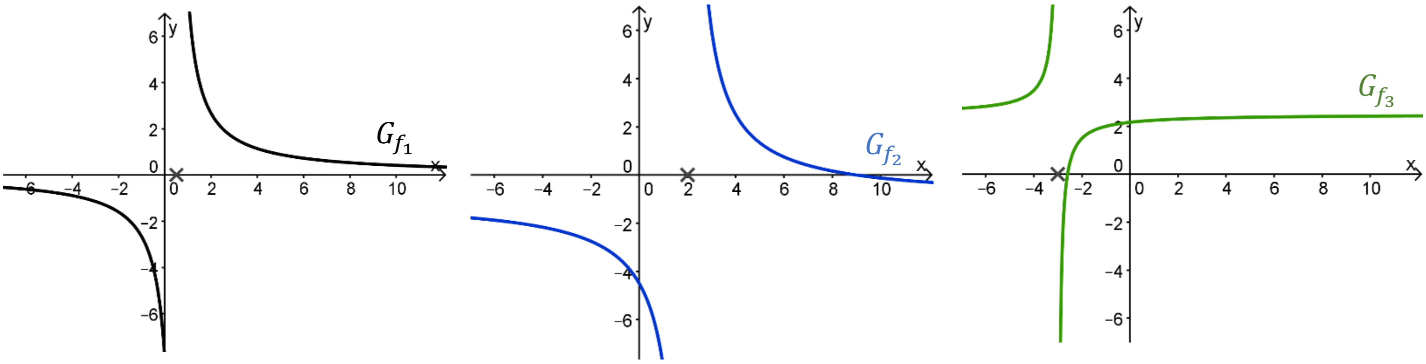
Möchte man nun für $x = 0{,}5$ einsetzen, dann erhält man für $y = \frac{4}{0{,}5-0{,}5} = ϟ$ keinen Wert, da man nicht durch 0 teilen kann. Da es zum x-Wert 0,5 keinen zugehörigen y-Wert gibt, darf dieser Wert auch nicht in der Definitionsmenge enthalten sein. Die Definitionsmenge lautet also $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0{,}5\}$ (sprich: „Q ohne 0,5“).

Immer, wenn der Nenner eines Bruchs durch Einsetzten eines x-Wertes Null werden würde, dann muss genau dieser Wert aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

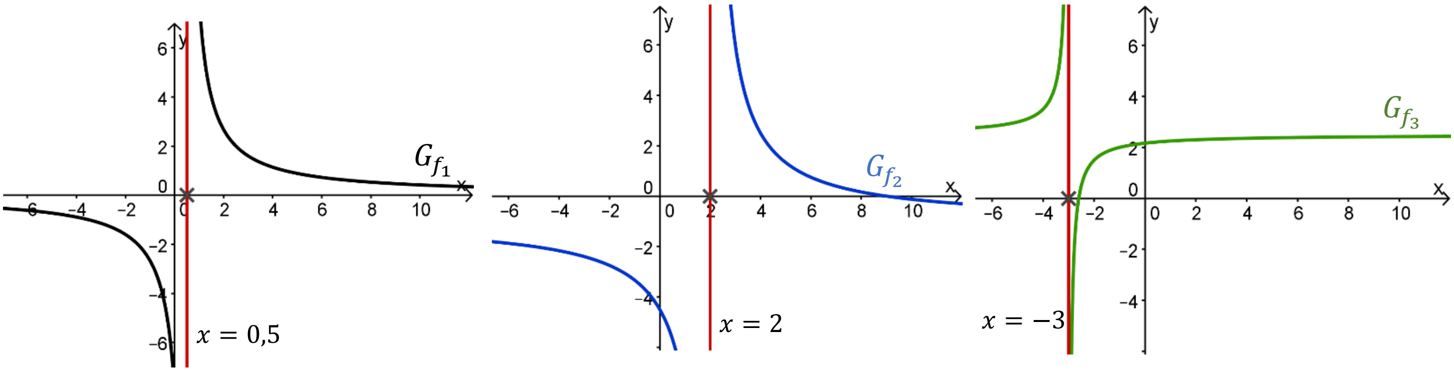
Für $f_2(x) = \frac{7}{x-2} - 1$ lautet beispielsweise die Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$ und

für $f_3(x) = \frac{-1}{x+3} + 2{,}5$ lautet die Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{Q}\backslash\{-3\}$.

Wir betraten nun die entsprechenden Funktionsgraphen an den Stellen der Definitionslücke.



Die Graphen der Funktionen sind an den Stellen der Definitionslücke nicht definiert, weshalb sich an diesen Stellen kein Punkt des Funktionsgraphen befinden kann. Dies kennzeichnet man, indem man eine senkrechte Gerade einzeichnet.



Diese senkrechte Gerade nennt man eine senkrechte Asymptote des Graphen an der Stelle $x = b$.

Hier:

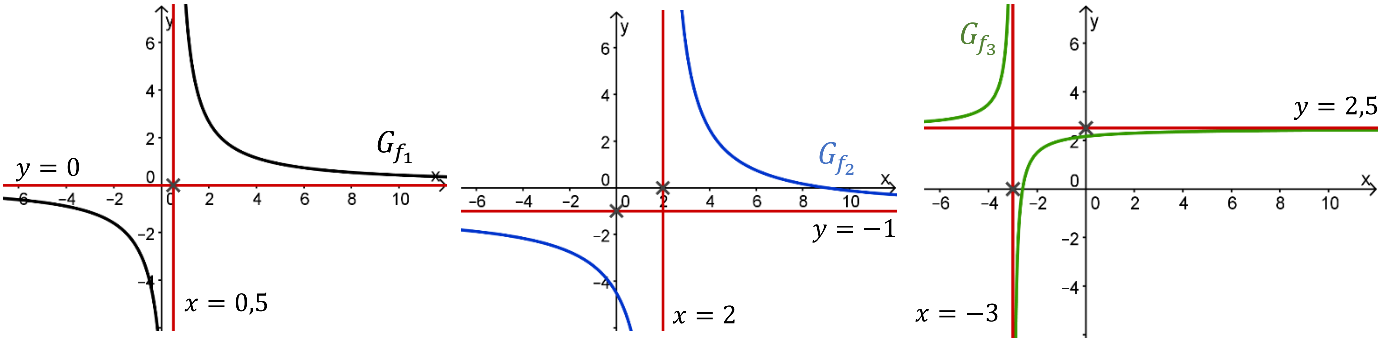
G_{f_1} hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 0{,}5$.

G_{f_2} hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 2$.

G_{f_3} hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = -3$.

Der Graph verläuft in der Nähe dieser Stellen in Richtung der positiven oder negativen y-Achse, was bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle sehr große bzw. kleine (sehr groß mit negativem Vorzeichen) y-Werte hat. Das liegt daran, dass Werte die nahe an der Definitionslücke gewählt werden, zu einem sehr kleinen Nenner führen. Beispiel: $f_1(0{,}50001) = \frac{4}{0{,}50001-0{,}5} = \frac{4}{0{,}00001} = 400000$. Der y-Wert zum x-Wert 0,50001 beträgt also 400000.

Doch auch an den linken und rechten Rändern scheinen die Funktionsgraphen sich ähnlich zu verhalten. Hier kann man ebenfalls eine Asymptote einzeichnen.



Wir betrachten dazu nochmal die Funktionsterme:

$f_1(x) = \frac{4}{x-0{,}5} + 0$; $f_2(x) = \frac{7}{x-2} - 1$; $f_3(x) = \frac{-1}{x+3} + 2{,}5$;

Vergleicht man die Funktionsterme nun jeweils mit der waagrechten Asymptote, dann fällt auf, dass diese durch den Wert c, also den zweiten Summanden bestimmt wird. Denn genau an dieser Stelle schneidet die Asymptote die y-Achse.

(Zur Erinnerung: Allgemeine Form: $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$)

Dies liegt daran, dass für sehr große x-Werte der Bruch gegen 0 geht und sich damit der y-Wert dem Wert c annähert.

Wir bestimmen im Folgenden jeweils den y-Wert zum x-Wert 1000, um das deutlich zu erkennen.

$f_1(100) = \frac{4}{1000-0{,}5} = 0{,}004002001 \; (c = 0)$

$f_2(100) = \frac{7}{1000-2} - 1 \approx 0{,}007014028 - 1 = -0{,}992985971 \; (c = -1)$

$f_3(100) = \frac{-1}{1000+3} + 2{,}5 \approx 0{,}000997008 + 2{,}5 = 2{,}499002991 \; (c = 2{,}5)$

Wichtig ist:

Hat man eine Funktion, wie beispielsweise $f(x) = \frac{3}{x+1} - 2$ gegeben, dann weiß man, dass die Definitionsmenge durch den Nenner bestimmt wird ($\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$) und es an der Stelle der sogenannten Definitionslücke eine senkrechte Asymptote mit $x = -1$ gibt. Durch den Wert c ist die waagrechte Asymptote festgelegt, die die Gleichung $y = -2$ hat.