## Elementare gebrochen-rationale Funktionen, Definitionsmenge und Asymptoten

Merke:

Allgemein nennt man eine auf ihrer maximalen Definitionsmenge gegebene Funktion $f$ der Form $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$

eine elementare gebrochen-rationale Funktion.

Der Graph $G_f$ der Funktion wird als Hyperbel bezeichnet.

Wir betrachten im Folgenden die Definitionsmenge der betrachteten Funktion $f$ mit $f_1(x) = \frac{4}{x-0{,}5}$.

Immer, wenn der Nenner eines Bruchs durch Einsetzten eines $x$-Wertes Null werden würde, dann muss genau dieser Wert aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

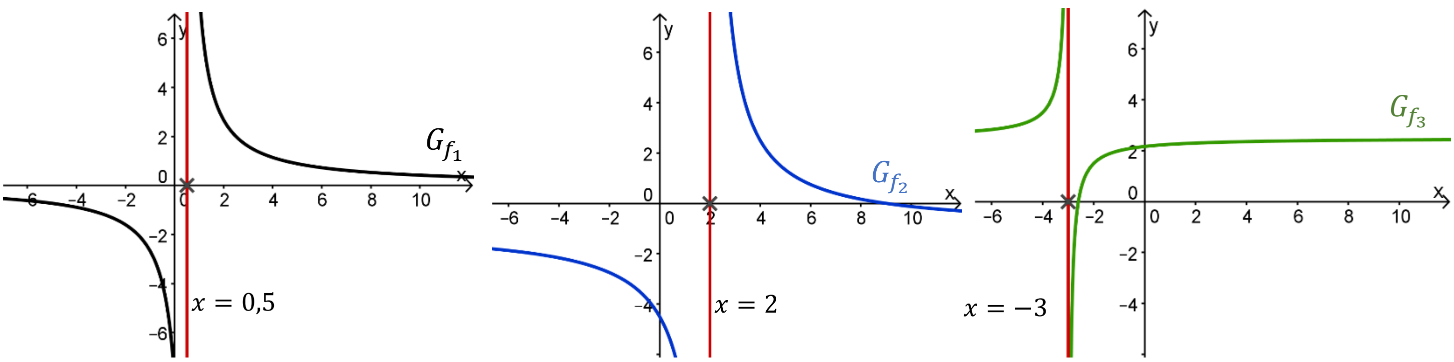
Die Definitionsmenge lautet also $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0{,}5\}$ (sprich: „Q ohne 0,5").

Weitere Beispiele:

$f_2(x) = \frac{7}{x-2} - 1$ $\qquad$ $\mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$

$f_3(x) = \frac{-1}{x+3} + 2{,}5$ $\qquad$ $\mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{Q}\backslash\{-3\}$

Wir betraten nun die entsprechenden Funktionsgraphen an den Stellen der Definitionslücke. Die Graphen der Funktionen sind an den Stellen der Definitionslücke nicht definiert, weshalb sich an diesen Stellen kein Punkt des Funktionsgraphen befinden kann. Dies kennzeichnet man, indem man eine senkrechte Gerade einzeichnet.




Diese senkrechte Gerade nennt man eine senkrechte Asymptote des Graphen an der Stelle $x = b$.

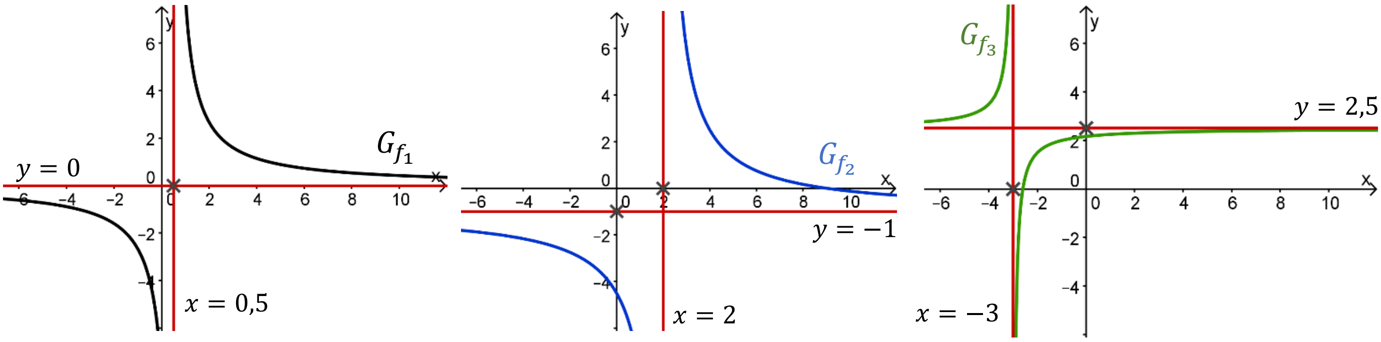
Hier:

$G_{f_1}$ hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 0{,}5$.

$G_{f_2}$ hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 2$.

$G_{f_3}$ hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = -3$.

Doch auch an den linken und rechten Rändern scheinen die Funktionsgraphen sich ähnlich zu verhalten. Hier kann man ebenfalls eine Asymptote einzeichnen.




Wir betrachten dazu nochmal die Funktionsterme:

$f_1(x) = \frac{4}{x-0{,}5} + 0$; $f_2(x) = \frac{7}{x-2} - 1$; $f_3(x) = \frac{-1}{x+3} + 2{,}5$;

Hat man eine Funktion, wie beispielsweise $f(x) = \frac{3}{x+1} - 2$ gegeben, dann weiß man, dass

- die Definitionsmenge durch den Nenner bestimmt wird ($\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$)
- es an der Stelle der sogenannten Definitionslücke eine senkrechte Asymptote mit $x = -1$ gibt.
- durch den Wert $c$ die waagrechte Asymptote festgelegt ist, die die Gleichung $y = -2$ hat.