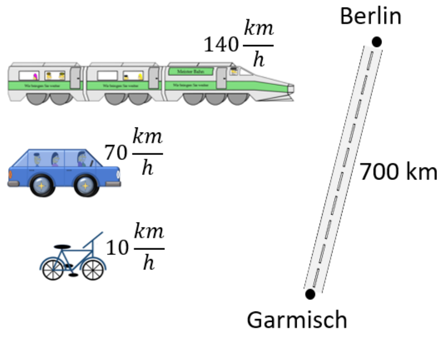
Elementare gebrochen-rationale Funktionen

Indirekt proportionale Größen

Familie Friedrich fährt von Garmisch aus in den Urlaub zu Freunden nach Berlin. Die Strecke beträgt etwa 700 km.



Wenn sie mit dem Zug fahren, dann benötigen sie mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $140\,\frac{km}{h}$ etwa 5 Stunden.

Mit dem Auto dauert die Fahrt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\,\frac{km}{h}$ etwa doppelt so lange, also 10 Stunden.

Bei einer Fahrradtour nach Berlin hätten Sie eine Durchschnittsgeschwindigkeit von nur $14\,\frac{km}{h}$ und würden damit 10 Mal länger als mit dem Zug, also 50 Stunden, fahren.
Wir tragen die zusammenhängenden Größen x ≔„Durchschnittliche Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$." und y ≔„Benötigte Zeit in Stunden." in einer Wertetabelle zusammen.

$\cdot 5 \qquad \cdot 2$

x: Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	14	70	140
y: Zeit in Stunden	50	10	5

$:5 \qquad :2$

Geschwindigkeit · 2 Fahrzeit : 2

Wie man anhand der Tabelle gut erkennen kann:

- eine Verfünffachung der Durchschnittsgeschwindigkeit hat eine Verringerung der Fahrzeit um ein Fünftel zur Folge.
- Fährt man im Schnitt doppelt so schnell, dann halbiert sich die Fahrzeit.

Merke:
Immer, wenn eine Vervielfachung von jedem Wert der einen Größe zu einer Verringerung des entsprechenden Wertes der anderen Größe, um den gleichen Teil führt, dann spricht man von zwei zueinander indirekt proportionalen Größen.

Dieser Zusammenhang kann hier auch durch eine Funktion f beschrieben werden. Fährt man mit einer Geschwindigkeit von $1\,\frac{km}{h}$, dann bedeutet das, dass man eine Stunde benötigt, um einen Kilometer zurückzulegen.

→ Für 700 km benötigt man 700 Stunden.
Für $x = 1$ gilt: $y = 700$
Verdoppelt man die Geschwindigkeit, dann benötigt man nur noch 350 Stunden.
Für $x = 2$ gilt: $y = \frac{700}{2}$
Für $x = 3$ gilt: $y = \frac{700}{3}$

x in $\frac{km}{h}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y in h	700	$\frac{700}{2}$	$\frac{700}{3}$	$\frac{700}{4}$	$\frac{700}{5}$	$\frac{700}{6}$	$\frac{700}{7}$	$\frac{700}{8}$	$\frac{700}{9}$

Um den y-Wert zu berechnen, muss man also immer 700 durch den entsprechenden x-Wert teilen. Damit kann man diesen Zusammenhang allgemein darstellen:

$y = \frac{700}{x}$

(Hinweis: Der Einfachheit wegen betrachten wir den Zusammenhang einheitslos.)

Die zugehörige Funktion f ist eine gebrochen-rationale Funktion und hat die Funktionsvorschrift $f: x \longmapsto \frac{700}{x}$ mit $x > 0$. Der Graph solcher Funktionen beschreibt dabei in der Regel einen Teil einer Hyperbel.

Merke:
Zwei indirekt proportionale Größen können durch eine Zuordnung mit der Zuordnungsvorschrift $x \longmapsto \frac{a}{x}$, $a \neq 0$ beschrieben werden. In diesem Fall spricht man von indirekter Proportionalität.

Im obigen Beispiel ist der Wert $a = 700$. Der Zusammenhang zwischen zwei proportionalen Größen, kann mit Hilfe einer Umstellung der zugehörigen Gleichung auch anders deutlich machen. Dazu betrachten wir das Beispiel von oben und formen die Gleichung um.

$y = \frac{700}{x} \qquad |\cdot x$

$x \cdot y = 700$

Allgemein gilt: $x \cdot y = a$

Tatsächlich gilt dieser Zusammenhang für jedes Wertepaar aus unserer Wertetabelle:

x in $\frac{km}{h}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y in h	700	$\frac{700}{2}$	$\frac{700}{3}$	$\frac{700}{4}$	$\frac{700}{5}$	$\frac{700}{6}$	$\frac{700}{7}$	$\frac{700}{8}$	$\frac{700}{9}$
$x \cdot y$	700	700	700	700	700	700	700	700	700

Beispielaufgaben dazu:

1. Vier Arbeiter benötigen acht Stunden, um die Zimmer eines Hauses zu streichen. Bestimmen Sie, wie viel Stunden drei Arbeiter benötigen würden.
   Lösung:
   Es handelt sich um einen indirekt proportionalen Zusammenhang. Dabei benötigen $x = 4$ Arbeiter $y = 8$ Stunden.

   Es gilt $a = x \cdot y$ (vgl. Herleitung oben)
   Damit folgt: $a = 4 \cdot 8 = 32$
   → $y = \frac{32}{x}$
   Für drei Arbeiter gilt damit: $y = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$

Antwort: Drei Arbeiter benötigen etwa 10,67 Stunden bzw. 10 Stunden und 40 Minuten.

2. Weisen Sie nach, dass die Größen x und y indirekt proportional zueinander sind.

x	1	3	5	10	20
y	30	10	6	3	1,5

   Lösung:
   Wir müssen nachweisen, dass für jedes Wertepaar das Produkt $x \cdot y$ den gleichen Wert ergibt.
   $1 \cdot 30 = 30;\ 3 \cdot 10 = 30;\ 5 \cdot 6 = 30;\ 10 \cdot 3 = 30;\ 1{,}5 \cdot 20 = 30;$
   → x und y sind indirekt proportional zueinander.