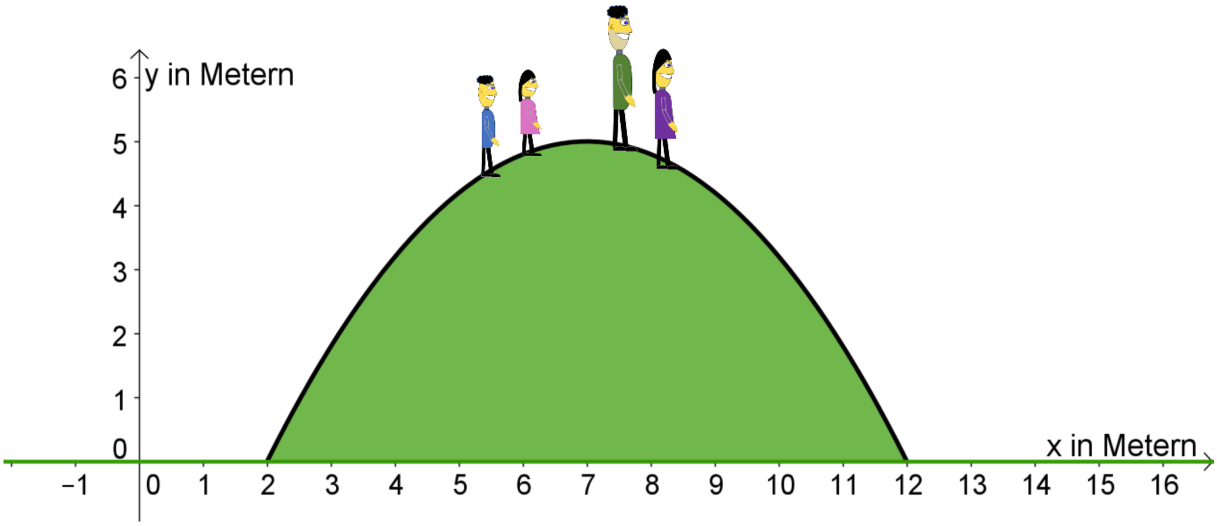
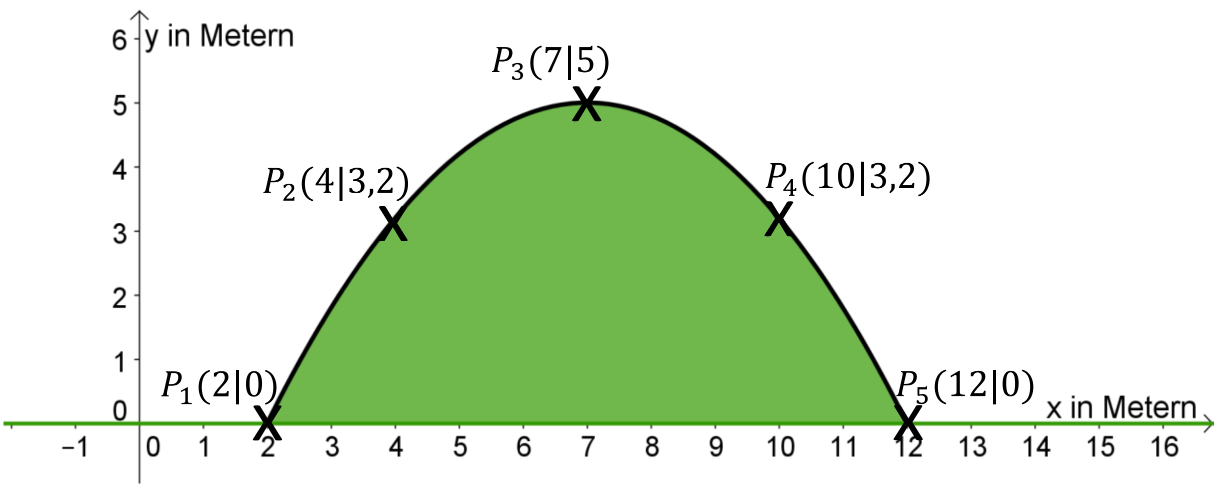
3.3 Quadratische Funktionen

3.3.1 Einführung in quadratische Funktionen und Parabeln

Familie Friedrich geht gerne wandern. Als sie an einem Hügel vorbeikommen, fragt sich der schlaue Carl Friedrich, ob man den Querschnitt des Hügels mit Hilfe des Graphen einer Funktion beschreiben kann.



Glücklicherweise hat Carl Friedrich einen Höhenmesser dabei. Er startet mit seiner Messung im Punkt $O(0|0)$ des vorliegenden Koordinatensystems und notiert sich die folgenden Punkte.



Diese teilt er seiner Mathematiklehrerin Frau Graph mit, die die entsprechende Funktionsgleichung $f(x) = -0,2x^2 + 2,8x - 4,8$ liefert.

„Den Graphen so einer Funktion nennt man übrigens eine Parabel." erklärt Frau Graph.

Merke:

Allgemein nennt man eine auf ihrer Definitionsmenge gegebenen Funktion f der Form

$f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ (allgemeine Parabelgleichung)

eine quadratische Funktion.

Der Graph G_f der Funktion wird als Parabel bezeichnet.

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie den Graphen der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen
f_1, f_2 und f_3 mit
$f_1(x) = -x^2 + 2x + 4$,
$f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$ und
$f_3(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8 - 4{,}8$.
Geben Sie an, welche Gemeinsamkeiten die Werte haben, die vor dem x^2 stehen.

Aufgabe 2:

Zeichnen Sie den Graphen, der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen g_1, g_2 und g_3 mit
$g_1(x) = x^2$,
$g_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3$ und
$g_3(x) = 2x^2 - 15x + 30$.
Geben Sie an, welche Gemeinsamkeiten die Werte haben, die vor dem x^2 stehen.

Aufgabe 3:

Geben Sie eine sinnvolle Definitions- und Wertemenge der Funktion an, dessen Graphen Carl-Friedrich beschreiben möchte.

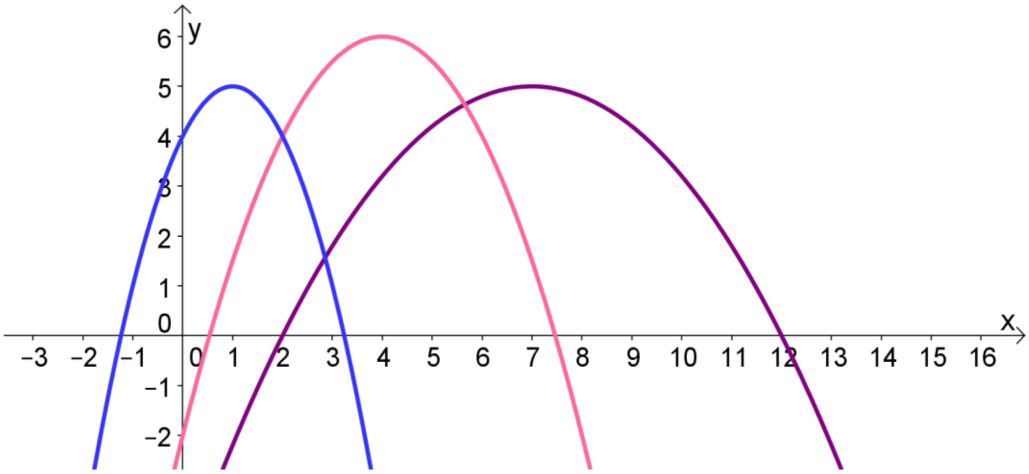
Lösungen:

Zu Aufgabe 1:

$f_1(x) = -x^2 + 2x + 4$

$f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$

$f_3(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8x - 4{,}8$



Merke:

Wird der Wert a aus der allgemeinen Parabelgleichung negativ gewählt, dann erhält man als Graphen eine nach unten geöffnete Parabel.

Bei $f_1(x)$ ist der Wert a gleich -1.

Bei $f_2(x)$ ist der Wert a gleich $-\frac{1}{2}$.

Bei $f_3(x)$ ist der Wert a gleich $-0{,}2$.

Man muss also immer den Wert vor dem x^2 betrachten, um den Wert a zu bestimmen. Diesen Wert nennt man auch den Leitkoeffizienten.

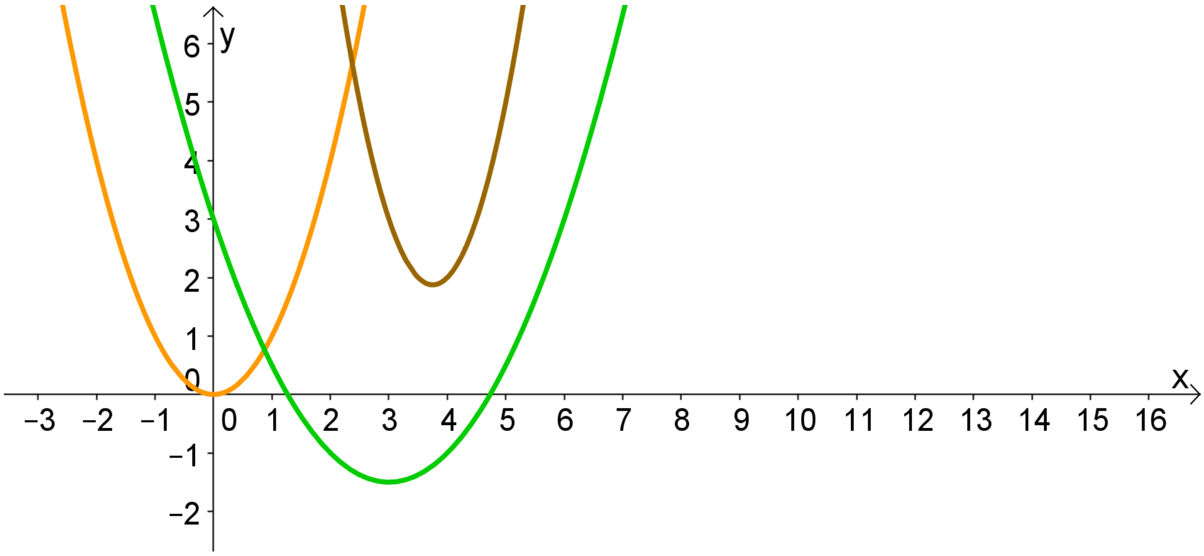
Der Punkt des Graphen mit der höchsten y-Koordinate wird als Scheitelpunkt S bezeichnet.

Zu Aufgabe 2:

$g_1(x) = x^2$

$g_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3$

$g_3(x) = 2x^2 - 15x + 30$



Merke:

Wird der Wert a aus der allgemeinen Parabelgleichung positiv gewählt, dann erhält man eine nach oben geöffnete Parabel.

Bei $g_1(x)$ ist der Wert a gleich $+1$.

Bei $g_2(x)$ ist der Wert a gleich $+\frac{1}{2}$.

Bei $g_3(x)$ ist der Wert a gleich $+2$.

Man muss also immer den Wert vor dem x^2 betrachten, um den Wert a zu bestimmen. Diesen Wert nennt man auch den Leitkoeffizienten.

Der Punkt des Graphen mit der niedrigsten y-Koordinate wird als Scheitelpunkt S bezeichnet.

Der Graph der Funktion g_1 mit $g_1(x) = x^2$ wird als Normalparabel bezeichnet. Hier ist der Wert a gleich $+1$.

Zu Aufgabe 3:

$\mathbb{D}_f = [2; 12]$

$\mathbb{W}_f = [0,5]$