

Quadratische Funktionen

Quadratische Ergänzung

Grundlegend können quadratische Terme auf verschiedene Arten umgeformt werden. Manche dieser Arten sorgen dafür, dass bestimmte Aussagen über den Term getroffen werden können, die mit anderen Formen nur schwer erkennbar sind.

So kann beispielsweise der Term $T(x) = -0,2x^2 + 2,8x - 4,8$ in

$$T(x) = -0,2(x - 7)^2 + 5 \text{ umgeformt werden.}$$

Das kann man leicht sehen, indem man $-0,2(x - 7)^2$ ausmultipliziert und anschließend weiter vereinfacht. Mit Hilfe dieser Form kann beispielsweise recht einfach eine Aussage darüber gemacht werden, für welchen x -Wert der Term am größten ist. Das gilt für den Wert $x = 7$. Darauf kommen wir später zurück.

Um Terme, wie $T(x) = -0,2x^2 + 2,8x - 4,8$ auf die oben beschriebene Form zu bringen, kann immer nach den gleichen Schritten vorgegangen werden. Dazu schauen wir uns den Ausdruck $-0,2x^2 + 2,8x - 4,8$ an.

1. Schritt: Leitkoeffizienten ausklammern.

$$\begin{aligned} -0,2x^2 + 2,8x - 4,8 &= \\ -0,2(x^2 - 14x + 24) &= \end{aligned}$$

Zum Ausklammern kann dabei im Taschenrechner jeder Koeffizient durch den Leitkoeffizienten geteilt werden.

$$\frac{0,2}{0,2} = 1; \frac{2,8}{-0,2} = -14; \frac{-4,8}{-0,2} = 24;$$

2. Schritt: Den Koeffizienten vor dem x als Produkt mit 2 als einen Faktor schreiben.

$$-0,2(x^2 - 2 \cdot 7x + 24) =$$

Unser Ziel ist es den Term so umzuformen, dass wir die binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ von rechts nach links anwenden können. Aus diesem Grund schreiben wir zunächst statt $14x$ den Ausdruck $2 \cdot 7x$ hin.

Vergleiche nun mit der entsprechenden binomischen Formel.

$$\begin{aligned} -0,2(x^2 - 2 \cdot 7x + 24) \\ (a^2 - 2ab + b^2) \end{aligned}$$

Wir haben nun den ersten und den zweiten Summanden der binomischen Formel konstruiert. Uns fehlt jedoch der Summand b^2 . Dazu verwenden wir einen Trick.

3. Schritt: Addiere den fehlenden Summanden dazu und subtrahiere diesen wieder.

$$-0,2(x^2 - 2 \cdot 7x + 7^2 - 7^2 + 24)$$

Indem wir eine Zahl dazu addieren und diese wieder subtrahieren ändern wir grundlegend nichts, außer dass wir den Ausdruck etwas anders hinschreiben.

4. Schritt: Verwende die binomische Formel.

$$-0,2(x^2 - 2 \cdot 7x + 7^2 - 7^2 + 24) =$$

$$-0,2((x - 7)^2 - 7^2 + 24) =$$

Der Ausdruck $x^2 - 2 \cdot 7x + 7^2$ kann nun als $(x - 7)^2$ geschrieben werden, da wir die Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ anwenden.

5. Schritt: Vereinfache den Ausdruck.

Zunächst vereinfachen wir den Ausdruck innerhalb der einen Klammer.

$$-0,2((x - 7)^2 - 7^2 + 24) =$$

$$-0,2((x - 7)^2 - 49 + 24) =$$

$$-0,2((x - 7)^2 - 25) =$$

Dann multiplizieren wir geschickt aus.

$$-0,2((x - 7)^2 - 25) =$$

$$-0,2(x - 7)^2 + 5$$

Kurzzusammenfassung:

1. Schritt: Leitkoeffizienten ausklammern.

$$-0,2x^2 + 2,8x - 4,8 =$$

$$-0,2(x^2 - 14x + 24)$$

2. Schritt: Produkt vor dem x mit 2 als Faktor schreiben.

$$-0,2(x^2 - 2 \cdot 7x + 24)$$

3. Schritt: Addiere und subtrahiere mit „ b^2 “.

$$-0,2(x^2 - 2 \cdot 7x + 7^2 - 7^2 + 24)$$

4. Schritt: Verwende eine binomische Formel.

$$-0,2(x^2 - 2 \cdot 7x + 7^2 - 7^2 + 24) =$$

$$-0,2((x - 7)^2 - 7^2 + 24) =$$

5. Schritt: Vereinfache den Ausdruck.

- Vereinfache innerhalb der einen Klammer.

$$-0,2((x - 7)^2 - 7^2 + 24) =$$

$$-0,2((x - 7)^2 - 49 + 24) =$$

$$-0,2((x - 7)^2 - 25) =$$

- Multipliziere geschickt aus.

$$-0,2((x - 7)^2 - 25) =$$

$$-0,2(x - 7)^2 + 5$$

Wir wissen nun:

$T(x) = -0,2x^2 + 2,8x - 4,8$ kann in

$T(x) = -0,2(x - 7)^2 + 5$ umgeformt werden.

Egal was wir nun für x -Werte in der Klammer $(x - 7)^2$ einsetzen, es gilt immer $(x - 7)^2 \geq 0$.

Zum Beispiel:

$$(2 - 7)^2 = (-5)^2 = 25$$

$$(8 - 7)^2 = 1^2 = 1$$

$$(-3 - 7)^2 = (-10)^2 = 100$$

Dass das so ist, liegt daran, dass die Werte der Klammer immer quadriert werden und eine Zahl zum Quadrat immer größer oder gleich 0 ist.

Setzen wir für x den Wert 7 ein, dann folgt: $(7 - 7)^2 = 0^2 = 0$.

Für diesen Wert ist der Ausdruck am kleinsten, also 0.

Und genau deswegen erhalten wir beim Term T mit der Gleichung

$T(x) = -0,2(x - 7)^2 + 5$ für $x = 7$ den größten Wert, nämlich

$$T(7) = -0,2(7 - 7)^2 + 5 = 5.$$

Übrigens: Für den Term $T_2(x) = 0,2(x - 7)^2 + 5$ erhalten wir bei $x = 7$ den kleinsten Wert. Das hängt davon ab, ob vor der Klammer ein positiver oder negativer Wert steht.