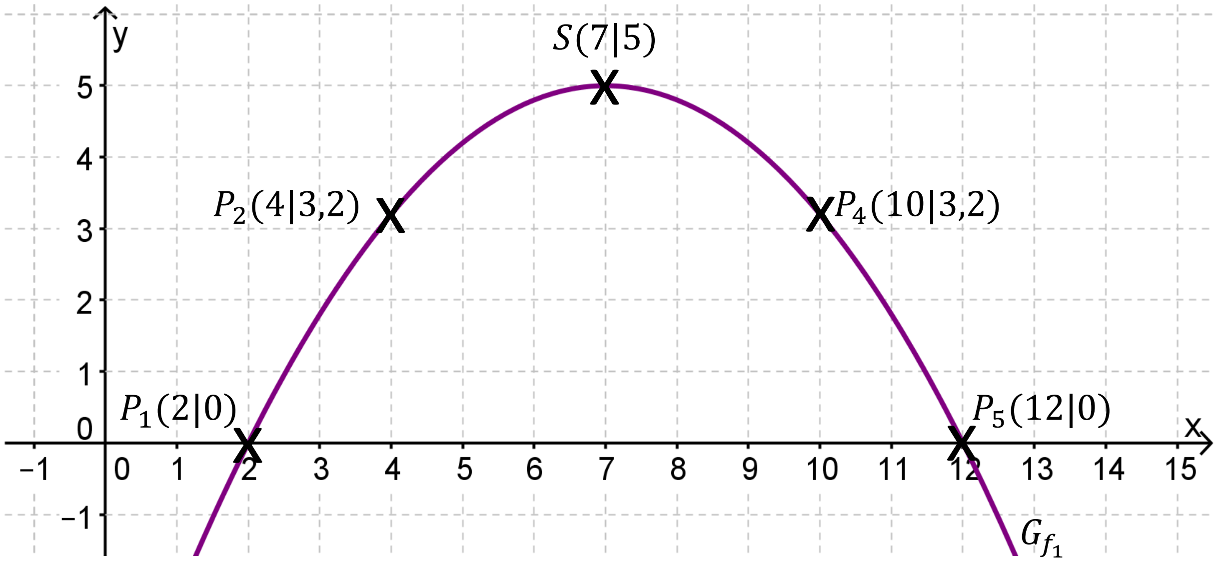
Quadratische Funktionen

Scheitelpunktform

Im Einführungskapitel zu „quadratischen Funktionen“ haben wir bereits die Funktion f_1 mit $f_1(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8x - 4{,}8$ betrachtet. Diesmal betrachten wir diese auf ganz $\mathbb{R}$. Wir zeichnen auch die zugehörige Parabel.

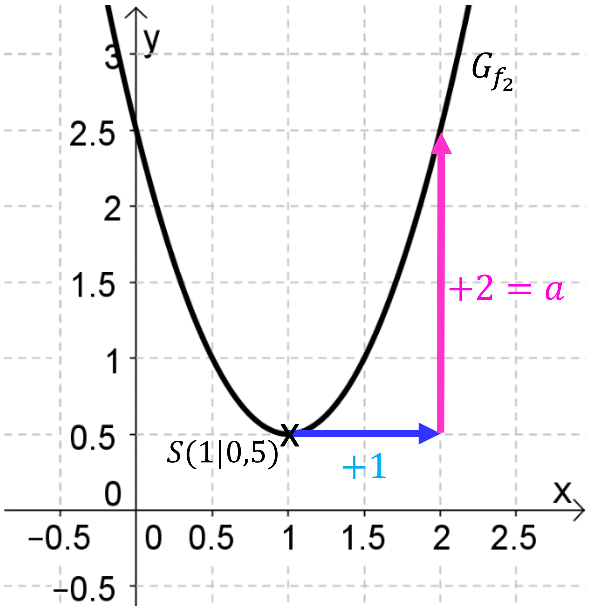


Im Kapitel „Quadratische Ergänzung“ haben wir gezeigt, dass wir den Ausdruck

$f_1(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8x - 4{,}8$ in $f_1(x) = -0{,}2(x - 7)^2 + 5$ umformen können.

Den Wert 7, den man für x einsetzen muss, damit der Wert in der Klammer null wird und die Zahl 5 finden wir im höchsten Punkt $S(7|5)$ des Graphen wieder. Diesen Punkt nennt man den Scheitelpunkt der Parabel. Deswegen nennt man diese Form die Scheitelpunktform.

Die Scheitelpunktform kann man auch graphisch ermitteln.



Damit kann schon ein Teil der Scheitelpunktform angegeben werden.

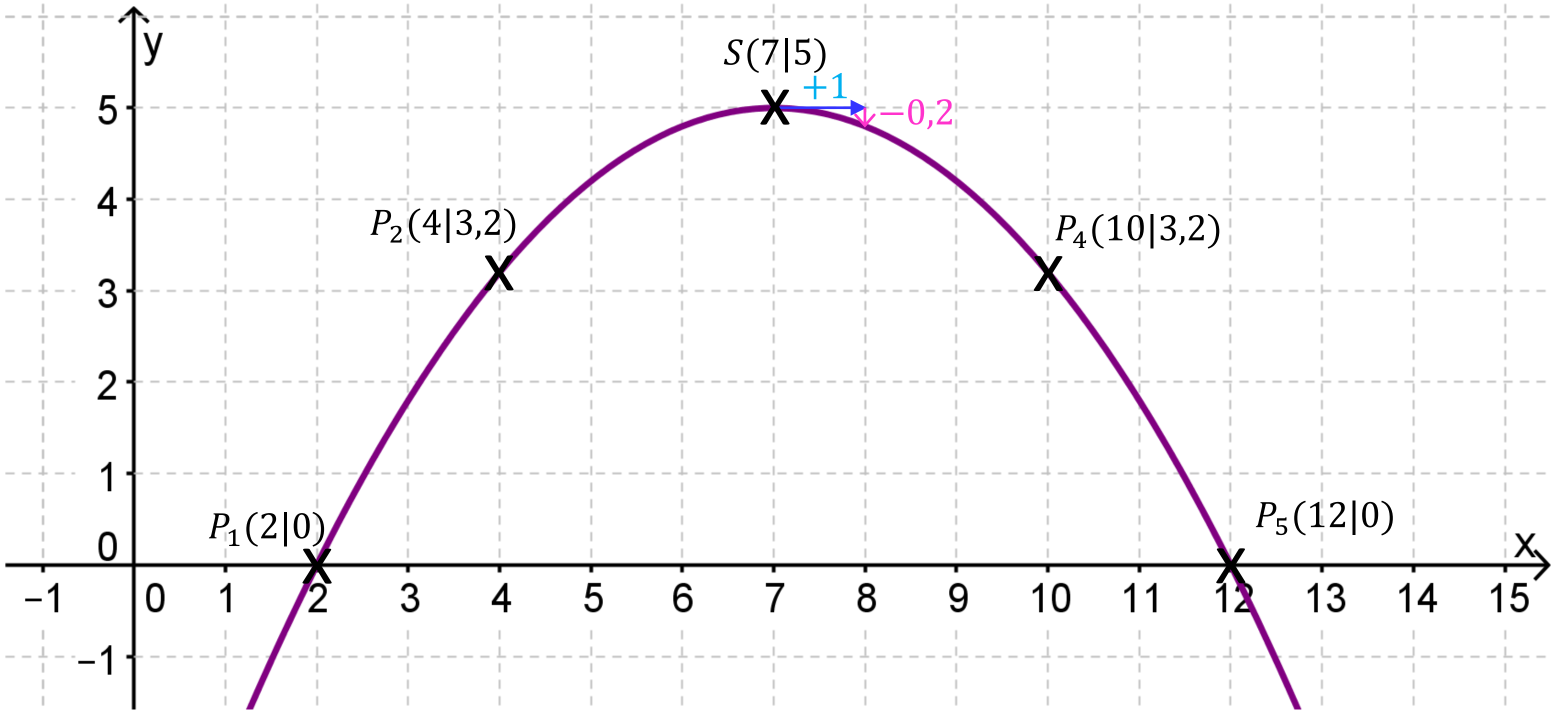
$f_2(x) = a(x - 1)^2 + 0{,}5$

Allerdings ist nun der Wert a noch nicht bekannt. Diesen findet man, indem man zunächst vom Scheitelpunkt aus um den Wert +1 in Richtung der x-Achse geht und anschließend die Länge des Weges zum nächsten Punkt in Richtung der y-Achse misst. Das Vorzeichen ergibt sich daraus, ob man nach oben oder nach unten gehen muss, um den Punkt des Graphen zu erhalten. Damit folgt $f_2(x) = 2(x - 1)^2 + 0{,}5$.

Häufig findet noch ein Vergleich bezüglich der Normalparabel - der Graph der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ - statt.

Man schreibt: Der Graph G_{f_2} geht aus der Normalparabel hervor durch Streckung um den Faktor 2 in y-Achsenrichtung, Verschiebung in x-Achsenrichtung um +1 und Verschiebung in y-Achsenrichtung um +0,5.

Zurück zum Anfangsbeispiel. Auch hier kann man die Scheitelpunktform mit Hilfe des Graphen der Funktion bestimmen.



Da der pinke Pfeil in Richtung der negativen y-Achse zeigt, ist a in diesem Fall negativ. Also gilt

$$f_2(x) = -0{,}2(x-7)^2 + 5.$$

Immer, wenn die entsprechende Parabel nach unten geöffnet ist, dann ist der Wert a negativ. Das haben wir schon im Kapitel „Quadratische Funktionen“ besprochen.

Stellen wir nun wieder einen Vergleich mit der Normalparabel an, dann müssen wir zunächst darauf eingehen, dass der Funktionsgraph von f_2 im Gegensatz dazu nach unten geöffnet ist. In diesem Fall spricht man davon, dass der Funktionsgraph aus der Normalparabel durch Spiegelung an der x-Achse hervorgeht.

Insgesamt schreibt man: Der Graph G_{f_1} geht aus der Normalparabel durch Spiegelung an der x-Achse, Streckung um den Faktor 0,2 (Stauchung) in y-Achsenrichtung, Verschiebung in x-Achsenrichtung um +7 und Verschiebung in y-Achsenrichtung um +5 hervor.

Scheitelpunktform

Merke: Scheitelpunktform

Allgemeine heißt für eine gegebene quadratische Funktion f die Funktionsgleichung $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ die Scheitelpunktform der Funktion.

x_s gibt den x-Wert des Scheitelpunktes an.

y_s gibt den y-Wert des Scheitelpunktes an.

a gibt die Öffnungsrichtung und Öffnungsweite an.

Dabei gilt:

Der Graph der Funktion ist im Vergleich zur Normalparabel, für…

…$|a| > 1$, um den Wert a gestreckt.

…$|a| < 1$, um den Wert a gestaucht. (Eine Streckung, um den Faktor kleiner 1.)

…$a < 0$ an der x-Achse gespiegelt.

Die Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ einer gegebenen Funktion f kann auch mit Hilfe von Formeln bestimmt werden. Dazu muss die allgemeine Parabelgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit Hilfe der quadratischen Ergänzung umgeformt werden.

Es gilt allgemein $x_s = -\frac{b}{2a}$.

Den y-Wert des Scheitels von G_f können wir nun ganz einfach berechnen, indem wir die entsprechende x-Koordinate einfach in die Funktionsgleichung von f einsetzen.

$$y_s = f(x_s)$$

Anfangsbeispiel: $f_1(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8x - 4{,}8$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2{,}8}{2 \cdot (-0{,}2)} = 7$$

$$y_s = f_1(x_s) = f_1(7) = -0{,}2 \cdot 7^2 + 2{,}8 \cdot 7 - 4{,}8 = 5$$

Damit können wir den Scheitelpunkt $S(5|7)$ des entsprechenden Funktionsgraphen und die Scheitelpunktform

$$f_1(x) = -0{,}2(x - 7)^2 + 5$$

ganz einfach angeben.