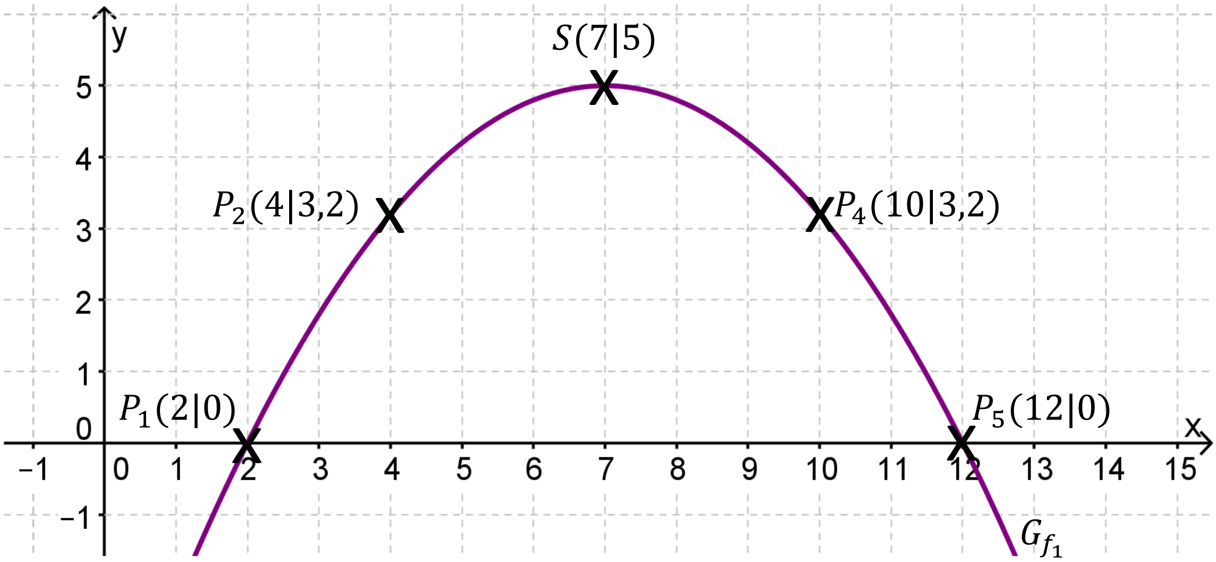
Quadratische Funktionen

Scheitelpunktform

Im Einführungskapitel zu „quadratischen Funktionen" haben wir bereits die Funktion f_1 mit $f_1(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8x - 4{,}8$ betrachtet. Diesmal betrachten wir diese auf ganz $\mathbb{R}$. Wir zeichnen auch die zugehörige Parabel.



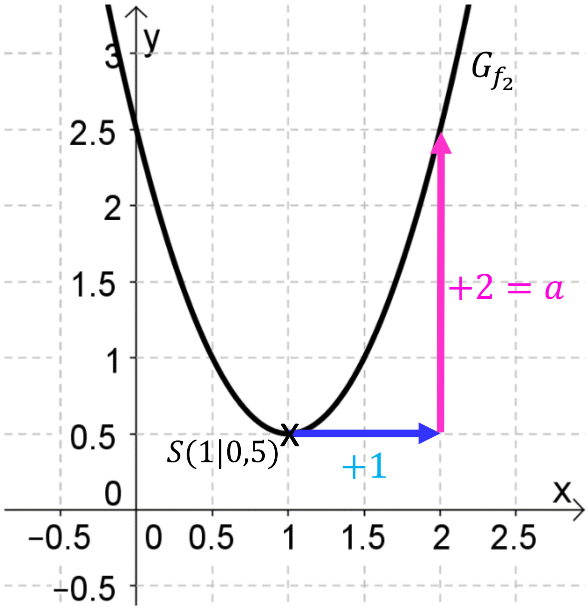
Im Kapitel „Quadratische Ergänzung" haben wir gezeigt, dass wir den Ausdruck

$f_1(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8x - 4{,}8$ in

$f_1(x) = -0{,}2(x - 7)^2 + 5$ umformen können.

Den Wert 7, den man für x einsetzen muss, damit der Wert in der Klammer null wird und die Zahl 5 finden wir im höchsten Punkt $S(7|5)$ des Graphen wieder. Diesen Punkt nennt man den Scheitelpunkt der Parabel. Deswegen nennt man diese Form die Scheitelpunktform.

Die Scheitelpunktform kann man auch graphisch ermitteln. Betrachten wir beispielsweise den Graphen der folgenden Funktion f_2, dann kann der Scheitelpunkt recht einfach abgelesen werden. Dieser liegt bei $S(1|0{,}5)$.



Damit kann schon ein Teil der Scheitelpunktform angegeben werden.

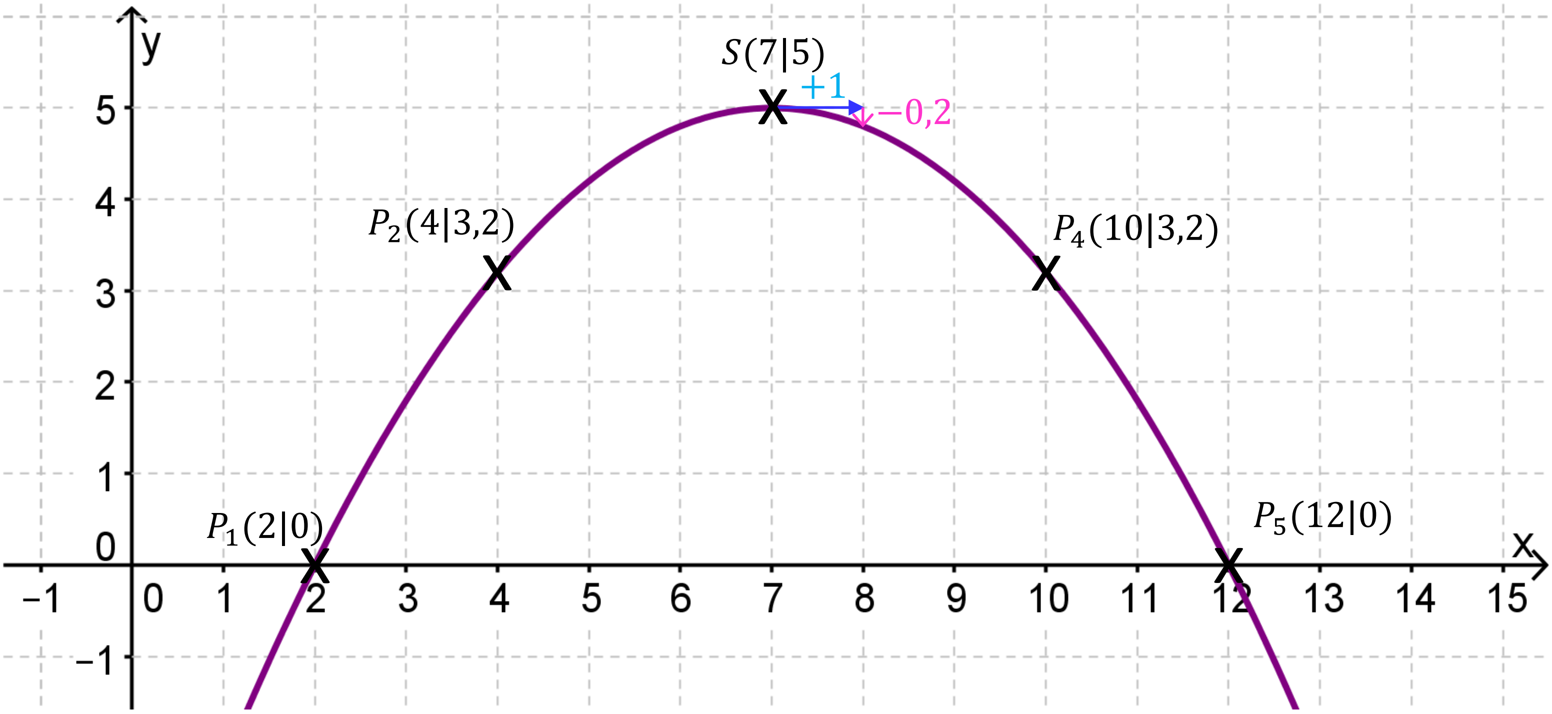
$f_2(x) = a(x-1)^2 + 0{,}5$

Allerdings ist nun der Wert a noch nicht bekannt. Diesen findet man, indem man zunächst vom Scheitelpunkt aus um den Wert +1 in Richtung der x-Achse geht und anschließend die Länge des Weges zum nächsten Punkt in Richtung der y-Achse misst. Das Vorzeichen ergibt sich daraus, ob man nach oben oder nach unten gehen muss, um den Punkt des Graphen zu erhalten. Damit folgt $f_2(x) = 2(x-1)^2 + 0{,}5$.

Häufig findet noch ein Vergleich bezüglich der Normalparabel - der Graph der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ - statt.

Man schreibt: Der Graph G_{f_2} geht aus der Normalparabel hervor durch Streckung um den Faktor 2 in y-Achsenrichtung, Verschiebung in x-Achsenrichtung um +1 und Verschiebung in y-Achsenrichtung um +0,5.

Zurück zum Anfangsbeispiel. Auch hier kann man die Scheitelpunktform mit Hilfe des Graphen der Funktion bestimmen.



Mit Hilfe der Koordinaten des Scheitelpunktes kann zunächst ein Teil der Funktionsgleichung bestimmt werden $f_2(x) = a(x-7)^2 + 5$.

Den Wert für a erhalten wir wiederum, indem wir vom Scheitelpunkt aus, um den Wert $+1$ Längeneinheiten nach rechts und anschließend in y-Richtung zum entsprechenden Punkt des Funktionsgraphen gehen. Die Länge des Pfeils beträgt dann 0,2 Längeneinheiten. Da er in Richtung der negativen y-Achse zeigt, ist a in diesem Fall gleich $-0{,}2$. Also gilt

$$f_2(x) = -0{,}2(x-7)^2 + 5.$$

Immer, wenn die entsprechende Parabel nach unten geöffnet ist, dann ist der Wert a negativ. Das haben wir schon im Kapitel „Quadratische Funktionen“ besprochen.

Stellen wir nun wieder einen Vergleich mit der Normalparabel an, dann müssen wir zunächst darauf eingehen, dass der Funktionsgraph von f_2 im Gegensatz dazu nach unten geöffnet ist. In diesem Fall spricht man davon, dass der Funktionsgraph aus der Normalparabel durch Spiegelung an der x-Achse hervorgeht.

Insgesamt schreibt man: Der Graph G_{f_1} geht aus der Normalparabel durch Spiegelung an der x-Achse, Streckung um den Faktor 0,2 (Stauchung) in y-Achsenrichtung, Verschiebung in x-Achsenrichtung um $+7$ und Verschiebung in y-Achsenrichtung um $+5$ hervor.

Merke: Scheitelpunktform

Allgemeine heißt für eine gegebene quadratische Funktion f die Funktionsgleichung $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ die Scheitelpunktform der Funktion.

x_s gibt den x-Wert des Scheitelpunktes an.

y_s gibt den y-Wert des Scheitelpunktes an.

a gibt die Öffnungsrichtung und Öffnungsweite an.

Dabei gilt:

Der Graph der Funktion ist im Vergleich zur Normalparabel, für…

…$|a| > 1$, um den Wert a gestreckt.

…$|a| < 1$, um den Wert a gestaucht. (Eine Streckung, um den Faktor kleiner 1.)

…$a < 0$ an der x-Achse gespiegelt.

Die Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ einer gegebenen Funktion f kann auch mit Hilfe von Formeln bestimmt werden. Dazu muss die allgemeine Parabelgleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit Hilfe der quadratischen Ergänzung umgeformt werden.

Für Interessierte haben wir die Herleitung im Folgenden ausgeführt. Wir werden jedoch einen einfacheren Weg wählen.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Schritt: a ausklammern.

$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

2. Schritt: Den zweiten Summanden in der Klammer so umformen, dass ein Produkt mit der Zahl 2 als Faktor entsteht.

$f(x) = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a})$

3. Schritt: Mit $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ quadratisch ergänzen.

$f(x) = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a})$

4. Anwenden einer binomischen Formel.

$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$

5. Vereinfachen des Funktionsterms.

$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$

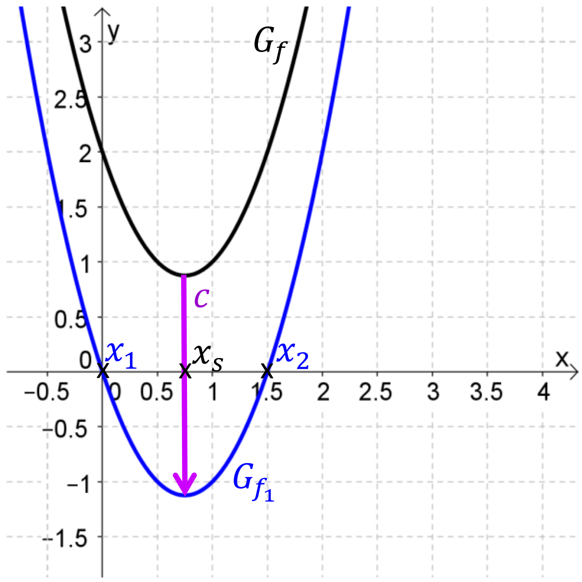
$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$

$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$

Für die x-Koordinate des Scheitelpunks gilt also allgemein $x_s = -\frac{b}{2a}$.

Betrachten wir den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$, dann machen wir uns zunächst eine Eigenschaft zu Nutze:



Addiert man zu einem Funktionsterm eine Konstante k dazu, dann verschiebt sich der entsprechende Funktionsgraph um diesen Wert in Richtung der y-Achse.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Verschiebt man nun den Graphen der Funktion f um den Wert c in Richtung der y-Achse nach unten, dann erhält man den Graphen einer Funktion f_1 mit

$f_1(x) = ax^2 + bx$.

Beide Graphen haben nun ihren Scheitelpunkt an derselben Stelle x_s. Dieser befindet sich genau in der Mitte der beiden Nullstellen von f_1. Die Nullstellen von f_1 können wir recht einfach bestimmen:

$ax^2 + bx = 0$

Zunächst müssen wir x ausklammern.

$x(ax + b) = 0$

Da ein Produkt nur dann null sein kann, wenn einer der Faktoren null ist, können wir die einzelnen Faktoren gleich null setzen, um die Nullstellen zu erhalten:

1. $x_1 = 0$
2. $ax + b = 0 \quad | -b$
   $ax = -b \quad |: a$
   $x_2 = -\frac{b}{a}$

Da x_s genau zwischen den beiden Nullstellen liegt, können wir den arithmetischen Mittelwert dieser berechnen, um x_s zu erhalten.

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - \frac{b}{a}}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Den y-Wert des Scheitels von G_f können wir nun ganz einfach berechnen, indem wir die entsprechende x-Koordinate einfach in die Funktionsgleichung von f einsetzen.

$$y_s = f(x_s)$$

Als Beispiel dazu schauen wir uns wieder das Anfangsbeispiel f_1 mit $f_1(x) = -0{,}2x^2 + 2{,}8x - 4{,}8$ an.

Dabei gilt nun:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2{,}8}{2 \cdot (-0{,}2)} = 7$$

Für y_s gilt dann:

$$y_s = f_1(x_s) = f_1(7) = -0{,}2 \cdot 7^2 + 2{,}8 \cdot 7 - 4{,}8 = 5$$

Damit können wir den Scheitelpunkt $S(5|7)$ des entsprechenden Funktionsgraphen und die Scheitelpunktform

$$f_1(x) = -0{,}2(x-7)^2 + 5$$

ganz einfach angeben.