Quadratische Funktionen

Nullstellen quadratischer Funktionen

Grundlegen muss man beim Berechnen der Nullstellen von Funktionen immer den gleichen Ansatz wählen. Wie der Ausdruck „Nullstellen" schon sagt, wird die Stelle gesucht, an der der Funktionsterm null wird.

Wie häufig in der Mathematik muss man diese Forderung dann zunächst einmal so hinschreiben. Also: $f(x) = 0$

Bei quadratischen Funktionen hängt der effektivste Lösungsweg dann davon ab, wie die Struktur des Funktionsterm aussieht.

Beispiel: (Die Funktionen sind jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ definiert)

$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 0{,}75x - 2{,}25$

$f_2(x) = 4x^2 - 3x$

$f_3(x) = 3x^2 - 6$

$f_4(x) = \frac{1}{3}(x-5)(x+4)$

$f_5(x) = 2(x-1)^2 - 8$

Wir schauen uns als erstes Beispiel die Funktion f_1 mit $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 0{,}75x - 2{,}25$ und $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ an. Die Nullstellen bestimmt man nun indem die Gleichung

$\frac{1}{2}x^2 - 0{,}75x - 2{,}25 = 0$

nach x aufgelöst wird. Das kann man in diesem Fall mit der „Lösungsformel für quadratische Gleichung", wie der Name auch schon vermuten lässt.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Anwendung dieser Formel und die möglichen Ergebnisse haben wir in einem extra Kapitel erklärt.

Bei unserem Beispiel erhalten wir:

$$x_{1,2} = \frac{-(-0{,}75) \pm \sqrt{(-0{,}75)^2 \pm 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2{,}25)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{5{,}0625}}{1} = \frac{0{,}75 \pm 2{,}25}{1}$$

$x_1 = \frac{0{,}75-2{,}25}{1} = -1{,}5;\ x_2 = \frac{0{,}75+2{,}25}{1} = 3;$

Setzt man diese Zahlen in die Ursprungsgleichung ein, dann entsteht eine wahre Aussage:

$\frac{1}{2}(-1{,}5)^2 - 0{,}75 \cdot (-1{,}5) - 2{,}25 = 0$
$\frac{1}{2} \cdot 2{,}25 + 1{,}125 - 2{,}25 = 0$
$1{,}125 + 1{,}125 - 2{,}25 = 0$
$0 = 0$

Für diese Zahlen wird der Funktionsterm 0. Alle anderen Zahlen, die man für x einsetzt, erfüllen diese Gleichung nicht.

Beispiel:
$\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 0{,}75 \cdot 1 - 2{,}25 = 0$
$\frac{1}{2} - 0{,}75 - 2{,}25 = 0$
$-2{,}5 = 0$

Hat man die Funktion f_2 mit $f_2(x) = 2x^2 - x$, dann kann man zunächst als weniger elegante Lösung genauso vorgehen.

$2x^2 - x = 0$
Man wählt $a = 4$, $b = -3$ und $c = 0$.
Eingesetzt erhält man
$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 3}{2 \cdot 4}$
$x_1 = \frac{3-3}{8} = 0;\ x_2 = \frac{3+3}{8} = \frac{3}{4};$

Besser ist es, wenn man auf der linken Seite der Gleichung $4x^2 - 3x = 0$ den Wert x ausklammert.

➔ $x(4x - 3) = 0$

Nun wird eine besondere Eigenschaft von Produkten ausgenutzt. Dazu betrachten wir als Beispiel das Produkt aus der Zahl 5 und einer beliebigen anderen Zahl.

$5 \cdot 3 = 15$
$5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$
$5 \cdot 11 = 55$

Egal mit welcher Zahl wir die 5 multiplizieren, das Ergebnis ist wird nie null, solange wir die 5 mit einer anderen Zahl als der null selbst multiplizieren.

$5 \cdot 0 = 0$

Und genau diese Logik machen wir uns zu Nutze.

Als erste Lösung wird das Produkt

$x(4x-3)$

dann null, wenn wir für x den Wert null einsetzen. Also haben wir

$x_1 = 0$.

Die zweite Lösung erhalten wir, indem wir überlegen für welchen Wert von x der zweite Faktor null wird. Das ist bei $\frac{3}{4}$ der Fall. Möchte man diesen Fall ausrechnen, dann kann man einfach den folgenden Ansatz wählen:

$4x - 3 = 0 \quad | + 3$
$4x = 3 \quad |: 4$
$x_2 = \frac{3}{4}$

Bei der Funktion f_3 mit $f_3(x) = 3x^2 - 6$ kann man auch wieder die weniger elegante Lösung verwenden.

$3x^2 - 6 = 0$

Hier ist der Wert b aus der allgemeinen Form gleich null.

Eingesetzt in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = \frac{0 \pm \sqrt{72}}{6} = \frac{0 \pm 6\sqrt{2}}{6}$$

$\rightarrow x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \sqrt{2};$

Auch hier gibt es einen geschickteren Lösungsweg.

Weshalb man in der Regel die Lösungsformel für $ax^2 + bx + c = 0$ verwendet, liegt daran, dass die Variable x einmal als linearer Ausdruck und einmal als quadratischer Ausdruck vorkommt. Da ist es schwierig nach x aufzulösen. Fällt der lineare Term jedoch weg, dann funktioniert das Auflösen ganz einfach, denn wir können zunächst einfach nach x^2 auflösen und dann die Quadratwurzel ziehen.

$3x^2 - 6 = 0 \quad |+6$
$3x^2 = 6 \quad |: 3$
$x^2 = 2 \quad |\sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

Der einfachste Fall kann anhand des nächsten Beispiels erfasst werden. Die Funktion f_4 mit $f_4(x) = \frac{1}{3}(x-5)(x+4)$ ist der sogenannten Produktform oder Linearfaktorform dargestellt. Die entsprechende Gleichung

$\frac{1}{3}(x-5)(x+4) = 0$

kann einfach dadurch gelöst werden, dass man sich überlegt, für welche x-Werte die Faktoren jeweils null werden.

Das gilt für $x_1 = 5$ und $x_2 = -4$, denn es gilt:

$\frac{1}{3}(5-5)(5+4) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot (5+4) = 0$
$\frac{1}{3}(-4-5)(-4+4) = \frac{1}{3}(-4-5) \cdot 0 = 0$

Bei der Funktion f_5 mit $f_5(x) = 2(x-1)^2 - 8$ gilt das Gleiche, wie bei f_3. Hier kann man die Gleichung

$2(x-1)^2 - 8 = 0$

Zunächst einfach nach der Klammer auflösen.

$2(x-1)^2 - 8 = 0 \quad |+8$
$2(x-1)^2 = 8 \quad |:2$

An dieser Stelle kann nun die Wurzel gezogen werden.

$(x-1)^2 = 4 \quad |\sqrt{}$
$x - 1 = \pm 2 \quad |+1$
$x_{1,2} = 1 \pm 2$