Elementare gebrochen-rationale Funktionen

Verschiebung von Hyperbeln im Koordinatensystem

Um die Verschiebung von Hyperbeln im Koordinatensystem zu verstehen, muss man sich nur ein paar Beispiele ansehen.

Zur Erinnerung: Die allgemeine Form für elementare gebrochen-rationale Funktionen ist $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\backslash\{b\}$

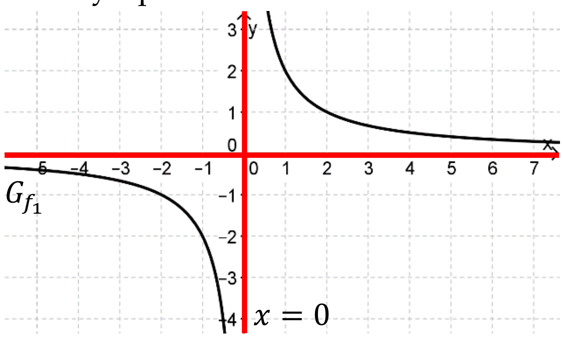
Wir betrachten die gegebenen Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit

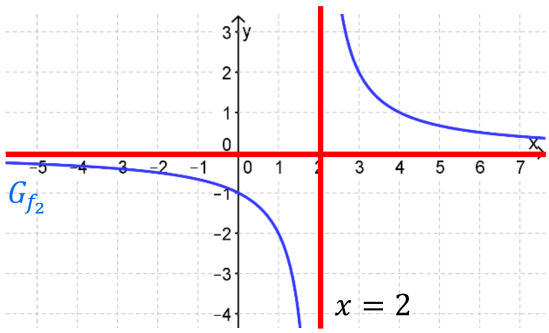
$f_1(x) = \frac{2}{x} \qquad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$,

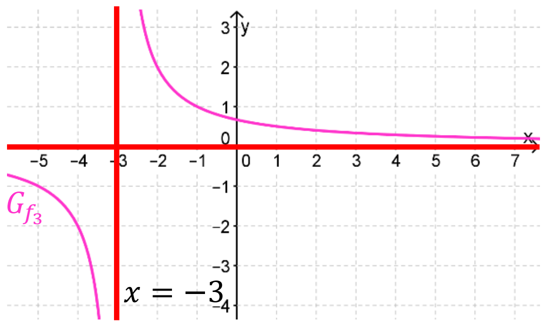
$f_2(x) = \frac{2}{x-2} \qquad \mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$ und

$f_3(x) = \frac{2}{x+3} \qquad \mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{Q}\backslash\{-3\}$.

Zum besseren Verständnis schauen wir uns die Graphen der Funktionen an und zeichnen jeweils die Asymptoten ein.







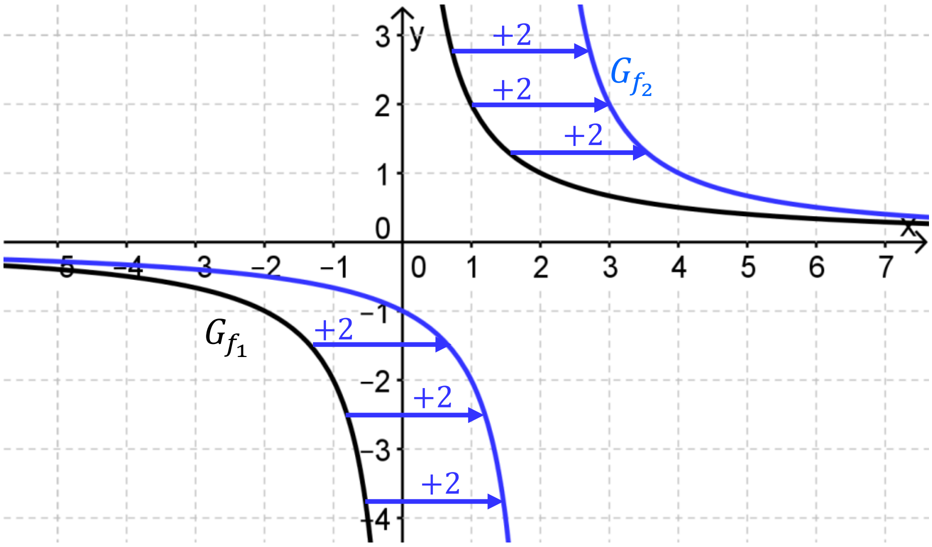
Betrachtet man die Graphen genau, dann scheinen sie alle den gleichen Verlauf zu beschreiben und sich nur an verschiedenen Orten im Koordinatensystem zu befinden.

Die waagrechte Asymptote ist dabei bei jedem Funktionsgraphen die gleiche.

Mit Hilfe der senkrechten Asymptote, kann man jedoch gut erkennen, dass die Graphen, um den jeweiligen Zahlenwert aus der Gleichung der senkrechten Asymptote in Richtung der x-Achse nach rechts bzw. links verschoben werden. Das ist hier auch genau der Wert, der aus der Definitionsmenge ausgeschlossen wird.

Das erkennt man noch besser, wenn der Graph von f_1 und der von f_2 in ein gemeinsames Koordinatensystem gezeichnet werden.

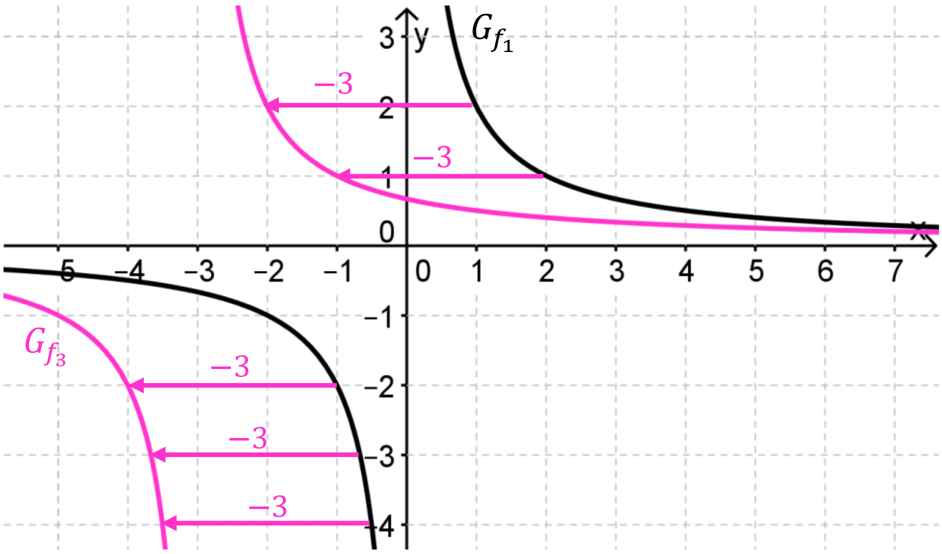
$f_1(x) = \frac{2}{x} \quad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{2}{x-2} \quad \mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{Q}\setminus\{2\}$



Man schreibt: Der Graph von f_2 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert $+2$ in Richtung der <u>x-Achse</u> hervor.

Analog geht man bei den Graphen von f_1 und f_3 vor.

$f_1(x) = \frac{2}{x} \quad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\qquad$ $f_3(x) = \frac{2}{x+3} \quad \mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{Q}\setminus\{-3\}$



Man schreibt: Der Graph von f_3 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert -3 in Richtung der x-Achse hervor.

Merke:

Der Wert b aus der allgemeinen Form für elementare gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\backslash\{b\}$ beschreibt die Verschiebung des Graphen der Funktion $g(x) = \frac{a}{x}$ in Richtung der x-Achse, um den Wert b.

Was der Wert c bewirkt schauen wir uns im Folgenden an.

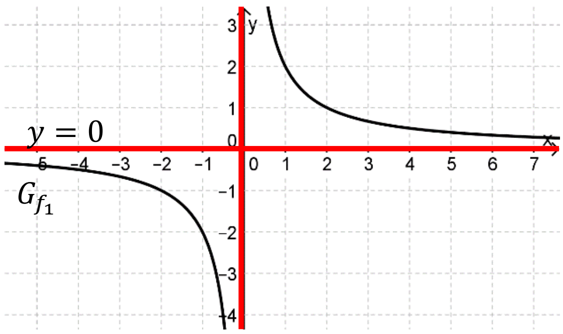
Um die Verschiebung der Graphen in Richtung der y-Achse besser zu verstehen, betrachten wir die gegebenen Funktionen f_1, f_4 und f_5 mit

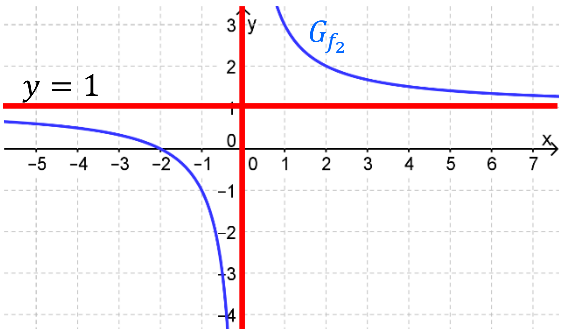
$f_1(x) = \frac{2}{x}$ $\quad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$,

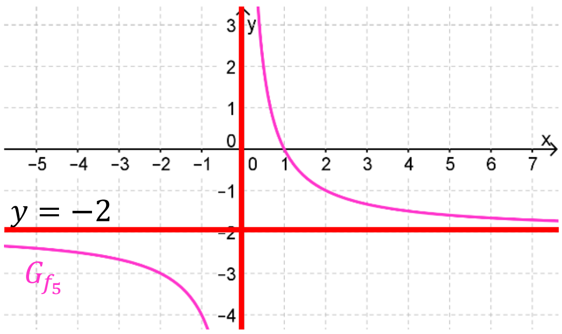
$f_4(x) = \frac{2}{x} + 1$ $\mathbb{D}_{f_4} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ und

$f_5(x) = \frac{2}{x} - 2$ $\mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

Zum besseren Verständnis schauen wir uns die Graphen der Funktionen an und zeichnen jeweils die Asymptoten ein.





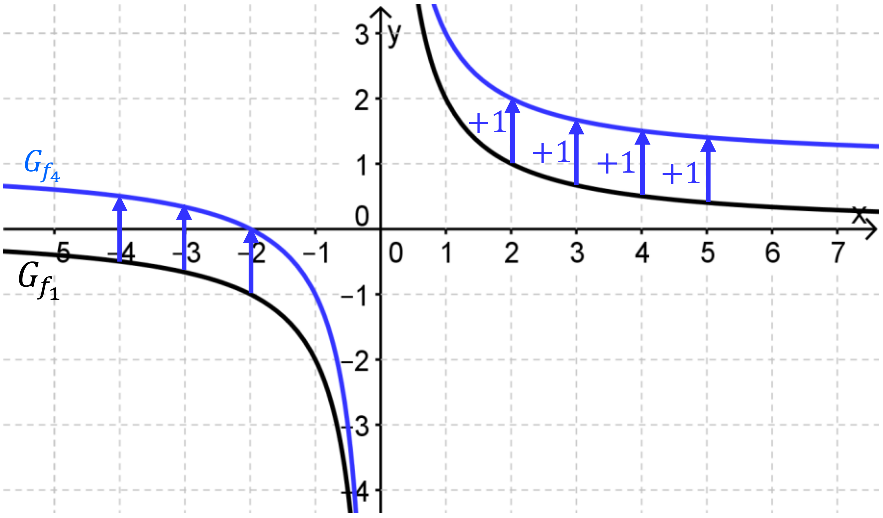


Die senkrechte Asymptote ist bei jedem Funktionsgraphen die gleiche.

Mit Hilfe der waagrechten Asymptote, kann man jedoch gut erkennen, dass die Graphen, um den jeweiligen Zahlenwert aus der Gleichung der waagrechten Asymptote in Richtung der y-Achse nach oben bzw. unten verschoben werden.

Das erkennt man noch besser, wenn der Graph von f_1 und der von f_4 in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.

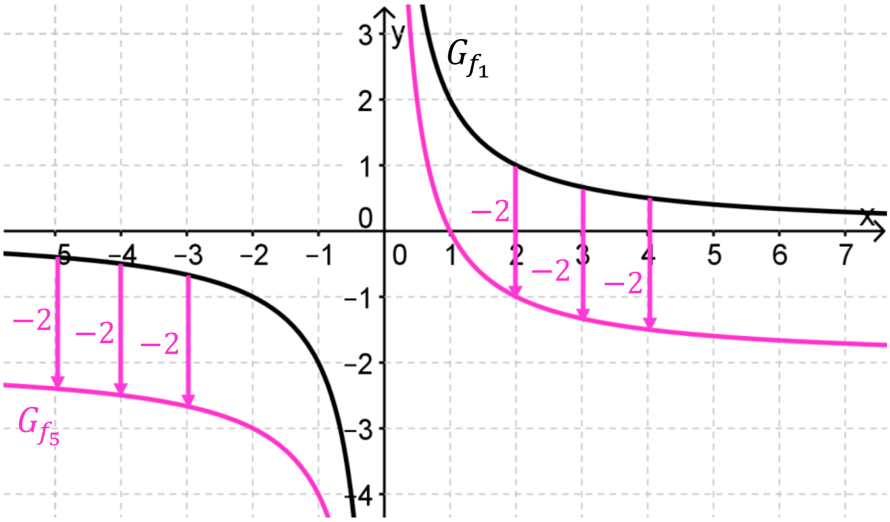
$f_1(x) = \frac{2}{x} \quad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\qquad$ $f_4(x) = \frac{2}{x} + 1 \quad \mathbb{D}_{f_4} = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$



Man schreibt: Der Graph von f_4 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert $+1$ in Richtung der y-Achse hervor.

Analog geht man bei den Graphen von f_1 und f_5 vor.

$f_1(x) = \frac{2}{x} \quad \mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\qquad$ $f_5(x) = \frac{2}{x} - 2 \quad \mathbb{D}_{f_5} = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.



Man schreibt: Der Graph von f_5 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert -2 in Richtung der y-Achse hervor.

Merke:

Der Wert c aus der allgemeinen Form für elementare gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}\setminus\{b\}$ beschreibt die Verschiebung des Graphen der Funktion $g(x) = \frac{a}{x}$ in Richtung der y-Achse, um den Wert c.

Für zwei gegebene Funktionen f_1 und f_6 mit

$f_1(x) = \frac{2}{x}$ $\quad$ ($\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$) und

$f_6(x) = \frac{2}{x-3} + 1{,}5$ ($\mathbb{D}_{f_6} = \mathbb{Q}\backslash\{3\}$) gilt damit beispielsweise:

Der Graph von f_6 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um den Wert $+3$ in Richtung der x-Achse und durch Verschiebung um den Wert $+1{,}5$ in Richtung der y-Achse hervor.